ZILIUXINGJIHE

子流形几何

纪永强 著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-1854 · 0101)
策划编辑：孔国平
文案编辑：吴寅泰　宛　楠





ISBN 7-03-012327-1
定 价：20.00 元

子流形几何

纪永强 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要讨论了黎曼几何中的子流形几何,主要研究了空间形式中的子流形、全脐子流形、伪脐子流形、迷向子流形、具有平行中曲率向量的子流形、局部对称空间中的子流形、全测地子流形及各种极小子流形。本书可作为综合大学、师范院校数学系高年级选修教材和研究生教材,也可供数学和物理工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

子流形几何/纪永强著.—北京:科学出版社,2004.1

ISBN 7-03-012327-1

Ⅰ.子… Ⅱ.纪… Ⅲ.子流形 Ⅳ.O189.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第095029号

策划编辑:孔国平/文案编辑:吴寅泰 宛 楠/责任校对:宋玲玲

责任印制:赵德静/封面设计:张 放

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2004年1月第一次印刷 印张:8 5/8

印数:1—1 500 字数:222 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　言

微分几何是一门古老的学科，有着悠久的历史。20 世纪以来，随着分析方法的发展，微分几何的研究从局部发展到整体，得出了许多深刻的并在其他数学分支（如代数拓扑，偏微分方程，复函数论，李群，变分学，泛函等）及现代物理中有重要作用的结果，这门学科虽然古老，但生命力依然旺盛，不仅是当前基础研究的热门领域，也是 21 世纪数学研究的主攻方向之一。

本书主要研究黎曼流形$(N^{n+p},\bar{g})$中的各种子流形——全测地子流形，全脐子流形，伪脐子流形，迷向子流形，极小子流形，法丛平坦的子流形等。特别是对常曲率黎曼流形——球空间$S^{n+p}(c)$中的子流形 M^n 的第二基本形式模长的平方σ，数量曲率r，Ricci 曲率 R_{ii}及截面曲率 R_{ijij}等内在量，加以某种限制（也称 Pinching 问题），从而得到了子流形的某些性质。上述问题的研究，起源于 1968 年 J. Simons 给出的球面 $S^{n+p}(1)$中的极小子流形的积分公式，自那以后，对 Pinching 问题，几何学家研究的很多。目前人们使用由 E. Cartan 创造的并由著名数学家陈省身先生发展的活动标架法来计算流形上各种函数的 Laplacian，建立最佳的 Pinching 常数，外围空间已推广到非空间形式或复射影空间 CP^n。

本书的最后研究了局部对称黎曼流形中的各种子流形。

本书的一个特点是使用活动标架法以及局部和整体相结合的方法研究各种黎曼子流形。

为了研究黎曼子流形几何，我们在第一章介绍了微分流形、微分流形上的线性联络、张量场的外积、协变张量场的外微分、线性联络的挠率张量场和曲率张量场及线性联络的结构方程。在第二

章介绍了黎曼度量、黎曼联络、黎曼曲率张量场、黎曼流形的结构方程、黎曼流形的截面曲率，Ricci 曲率和数量曲率等。在第三章黎曼子流形的介绍中，用两种方法计算出了子流形的 Gauss 方程，Codazzi 方程和 Ricci 方程，这也是本书的另一个特点。特别还研究了黎曼流形 N^{n+1}中的超曲面 M^n，最后研究各种黎曼子流形。

本书除了作者的一些科研成果外，还收录了国内外著名数学家 J. Simons、陈省身先生、丘成桐先生、徐森林先生、沈一兵先生等的部分相关成果，并加以论证。本书论述严谨，详细，具体例子较多，读者不必过多地查阅文献就能熟练地掌握近代微分几何的基础知识。

由于作者水平有限，书中疏漏和错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

纪永强

2003 年 5 月

目　录

第一章　微分流形上的线性联络与绝对微分

1.1　微分流形的概念及例子

1. 拓扑流形与微分流形的定义

定义 1.1.1　如果拓扑空间(M,τ)满足：

(1) M 是A_2和 T_2 的拓扑空间，

(2) M 是局部欧氏的：即对任 $P\in M$，存在 P 点的开邻域 V 和映射 φ，使

$$\varphi: V\to\varphi(V)\subseteq R^n$$

是同胚映射，则称 M 是 n 维拓扑流形，φ 叫坐标映射，V 叫坐标域，(V,φ)叫坐标卡.

定义 1.1.2　n 维拓扑流形 M 上的 C^k 类微分构造是 M 上的坐标卡之集

$$\Phi\triangleq\{(V_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in A(\text{指标集})\}$$

满足：

(1) 覆盖性：$M=\bigcup\limits_\alpha V_\alpha$；

(2) 相容性：若$(V_\alpha,\varphi_\alpha)$，$(V_\beta,\varphi_\beta)\in\Phi$，当 $V_\alpha\cap V_\beta\neq\emptyset$时

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta)\subset R^n\to\varphi_\beta(V_\alpha\cap V_\beta)\subset R^n$$

与

$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(V_\alpha\cap V_\beta)\subset R^n\to\varphi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta)\subset R^n$$

都是 C^k 类微分同胚.

(3) 最大性：若(V,φ)与 Φ 中每个坐标卡是 C^k 相容的，则$(V,\varphi)\in\Phi$.

定义 1.1.3　n 维拓扑流形 M 带上 C^k 类微分构造 Φ，则称

(M,Φ)是 n 维 C^k 类微分流形.

今后只讨论 $k=\infty$的情况,即光滑(微分)流形.

注 设$(V_\alpha,\varphi_\alpha),(V_\beta,\varphi_\beta)\in\Phi,P\in V_\alpha\cap V_\beta$,

$$\varphi_\alpha(P)=(x_1(P),x_2(P),\cdots,x_n(P))$$

$$\varphi_\beta(P)=(y_1(P),y_2(P),\cdots,y_n(P))$$

则

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

其中 $y_i=y_i(x_1,\cdots,x_n)$是$x_1,\cdots,x_n$ 的函数,易知

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta)\subset R^n\to\varphi_\beta(V_\alpha\cap V_\beta)\subset R^n$$

是 C^∞映射的充要条件是分量 y_i 是光滑函数,即

$$y_i\in C^\infty(\varphi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta);R),i=1,2,\cdots,n$$

它还等价于:y_i 关于 x_j 有任意阶的连续偏导,$i,j=1,2,\cdots,n$.

映射 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵是

$$J(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\triangleq\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

定理 1.1.1 设 M 是 n 维拓扑流形,$\Phi_0=\{(V_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in A\}$是覆盖$M$ 的一族 C^∞相容的坐标卡之集,则 Φ_0 惟一确定了一个 C^∞微分构造:

$$\Phi=\{(V,\varphi)\mid 任(V_\alpha,\varphi_\alpha)\in\Phi_0,有\ \varphi\circ\varphi_\alpha^{-1},\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}是\ C^\infty映射\}$$

证明:只须验证 Φ 满足定义 1.1.2 的三个条件:

(1) 因 $\Phi_0\subset\Phi$,而 Φ_0 满足(1),所以 Φ 满足(1);

(2) 设$(V,\varphi),(W,\psi)\in\Phi$,则

$$\varphi\circ\psi^{-1}=(\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\psi^{-1})$$

与

$$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1})$$

都是 C^∞映射,所以满足(2);

(3) 设(W,ψ)与 Φ 中任一坐标卡(V,φ)是 C^∞ 相容的,即 $\psi\circ\varphi^{-1}$和 $\varphi\circ\psi^{-1}$是 C^∞ 映射,则对任意$(V_\alpha,\varphi_\alpha)\in\Phi_0$,因为 $\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}$和$\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}$是 C^∞映射,从而

$$\psi\circ\varphi_\alpha^{-1}=(\psi\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1})$$

与

$$\varphi_\alpha\circ\psi^{-1}=(\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\psi^{-1})$$

都是 C^∞映射,故$(W,\psi)\in\Phi$,所以 Φ 满足(3).

注 由定理 1.1.1 知,证明(M,Φ)是 n 维 C^∞ 微分流形时,必须验证 Φ 满足覆盖性(1)和相容性(2). 另外,若 Φ_1 和 Φ_2 都满足定义 1.1.2 的(1)和(2),并且 Φ_1 和 Φ_2 中的元素彼此是相容的,则(M,Φ_1)和(M,Φ_2)是同一个微分流形.

2. 由一个整体坐标域构成的 C^∞ 微分流形

定理 1.1.2 设 M 是A_2,T_2 的拓扑空间,若存在同胚映射

$$\varphi:M\to\varphi(M)\subseteq R^n$$

则(M,Φ)是 n 维 C^∞微分流形,其中 $\Phi=\{(M,\varphi)\}$.

证明:(1) 覆盖性:$M=M$

(2) 相容性:因为

$$\varphi\circ\varphi^{-1}=I$$

是 $\varphi(M)$上的恒等映射,它是 C^∞映射,所以(M,Φ)是 n 维 C^∞微分流形.

注 由一个坐标卡构成的微分流形可简单地记作(M,φ).

例 1 设 $M=R^n$,(R^n,τ)是A_2,T_2 的拓扑空间,恒等映射

$$I:R^n\to R^n,\quad I(x)=x$$

是同胚映射,则(R^n,I)是n 维 C^∞微分流形.

我们知道,R^3 中的简单曲线是指下面的映射:

$$F:(a,b)\to F[(a,b)]\subseteq R^3$$
$$F(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$$

F 既是单射又是满射,并且 F 是度量连续映射. 简单曲线在 R^3

中的图像是不自交的连续曲线.

由定理 1.1.2 我们可得下面的各定理.

定理 1.1.3 设 $M=F[(a,b)]$,即

$$M=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_i=f_i(t),i=1,2,3,a<t<b\}$$

是 R^3 中的简单曲线,作映射

$$\varphi:M\to\varphi(M)=(a,b)\subseteq R^1$$

$$\varphi(f_1(t),f_2(t),f_3(t))=t$$

则(M,φ)是 1 维 C^∞ 微分流形.

证明:(1) 因 R^3 是 A_2,T_2 的拓扑空间,M 作为 R^3 的子拓扑空间也是 A_2,T_2 的拓扑空间.

(2) 因为 φ 的逆 φ^{-1}存在:

$$\varphi^{-1}:(a,b)\to M\subset R^3$$

$$\varphi^{-1}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$$

所以 φ 既是单射又是满射.

设 $\tau_{(a,b)}$是(a,b)在 R^1 中的相对拓扑,τ_M 是M 在R^3 中的相对拓扑,因为对任$(c,d)\in\tau_{(a,b)}$,而 M 是简单曲线,所以

$$\varphi^{-1}[(c,d)]\in\tau_M$$

故 φ 是拓扑连续,又

$$(\varphi^{-1})^{-1}[\varphi^{-1}[(c,d)]]=\varphi\circ\varphi^{-1}[(c,d)]=(c,d)\in\tau_{(a,b)}$$

所以 φ^{-1}是拓扑连续,故 φ 是同胚映射,由定理 1.1.2 知,(M,φ)是一维 C^∞ 微分流形.

注 定理 1.1.3 中的 φ 和 φ^{-1}显然是度量连续,易知,φ 和 φ^{-1}是拓扑连续,所以 φ 是同胚映射.

注 一般,R^n 中的简单曲线:

$$M=\{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i=f_i(t),i=1,\cdots,n,a<t<b\}$$

是一维 C^∞ 微分流形. $n=2$ 就是平面 R^2 中的简单曲线.

具体例子如下:

例 2 R^3 中的圆柱螺线

$$M=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1=a\cos t,x_2=a\sin t,x_3=bt\}$$

$(-\infty<t<+\infty)$是一维 C^∞ 微分流形,同胚映射为

$$\varphi(a\cos t, a\sin t, bt)=t$$

或

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_3.$$

例 3 R^2 中的开圆

$$M=\{(x_1,x_2)\mid x_1=a\cos t, x_2=a\sin t, 0<t<2\pi\}$$

是一维 C^∞ 微分流形,同胚映射为

$$\varphi(a\cos t, a\sin t)=t.$$

定理 1.1.4 由显式方程给出的定义在开区间(a,b)上的平面连续曲线

$$M=\{(x_1,x_2)\mid x_2=f(x_1), a<x_1<b, f\text{ 连续}\}.$$

作同胚映射

$$M\to\varphi(M)=(a,b)\subseteq R^1$$

$$\varphi(x_1,x_2)=x_1.$$

其逆为 $\varphi^{-1}(x_1)=(x_1,f(x_1))$,则$(M,\varphi)$是一维 C^∞ 微分流形.

由此可知,所有定义在开区间上的初等连续显函数构成的曲线都是一维 C^∞ 微分流形.

具体例子如:抛物线 $x_2=x_1^2$,指数曲线 $x_2=a^{x_1}$,正弦曲线 $x_2=\sin x_1$ 等都是一维 C^∞ 微分流形.

我们知,设 D 是R^2 的单连通开集,空间 R^3 中的简单曲面是指下面的映射:

$$F: D\to F(D)\subseteq R^3$$

$$F(u,v)=(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$$

F 是一一对应的映射,并且 F 是度量连续. 简单曲面在 R^3 中的图像是一片不自交的连续曲面.

定理 1.1.5 设

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i=f_i(u,v), i=1,2,3. (u,v)\in D\subseteq R^2\}$$

是 R^3 中的简单曲面,作同胚映射为

$$\varphi: M\to\varphi(M)=D\subseteq R^2$$

$$\varphi(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))=(u,v)$$

其逆为 $\varphi^{-1}(u,v)=(f_1(u,v),f_2(u,v),f_3(u,v))$

则(M,φ)是二维 C^∞微分流形.

具体例子如下.

例 4 R^3 中的简单开球面

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=a\cos u\cos v,x_2=a\sin u\cos v,x_3=a\sin v\}$$

其中$(u,v)\in D=(0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,它是二维 C^∞微分流形.

例 5 R^3 中的简单开圆柱面

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=a\cos u,x_2=a\sin u,x_3=v\}$$

其中$(u,v)\in D=(0,2\pi)\times R^1$,它是二维 C^∞微分流形.

例 6 R^3 中的双曲抛物面

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=a(u+v),x_2=b(u-v),x_3=2uv\}$$

其中$(u,v)\in R^2$,它是二维 C^∞微分流形.

定理 1.1.6 R^3 中由显式方程给出的定义在平面中单连通开集 D 上的连续曲面

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_3=f(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in D\subseteq R^2,f\text{ 连续}\}$$

作同胚映射 $\varphi:M\to\varphi(M)=D\subseteq R^2$ 为

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2)$$

其逆为

$$\varphi^{-1}(x_1,x_2)=(x_1,x_2,f(x_1,x_2))$$

则(M,φ)是二维 C^∞微分流形.

注 一般,R^{n+1}中的连续超曲面

$$M=\{(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\mid x_{n+1}=f(x_1,\cdots,x_n),f\text{ 连续}\}$$

其中$(x_1,\cdots,x_n)\in D\subseteq R^n$,它是 n 维 C^∞微分流形.

由定理 1.1.6 知,R^3 中所有由显式方程给出的定义在单连通开集上的连续曲面都是二维 C^∞微分流形.

具体例子如下:

例 7 R^3 中的双曲面

$$M=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_3=\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{x_2^2}{b^2},(x_1,x_2)\in R^2\right\}$$

是二维 C^∞ 微分流形.

例 8 R^3 中的平面

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_3=ax_1+bx_2+c,(x_1,x_2)\in R^2\}$$

是二维 C^∞ 微分流形.

定理 1.1.7 设 M 是 R^3 中母线平行于 x_3 轴的开柱面,即

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_2=f(x_1),a<x_1<b,x_3\in R^1,f\text{ 连续}\}$$

作同胚映射 $\varphi:M\to\varphi(M)=(a,b)\times R^1\subseteq R^2$ 为

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_3),$$

其逆为

$$\varphi^{-1}(x_1,x_3)=(x_1,f(x_1),x_3),$$

则 (M,φ) 是二维 C^∞ 微分流形.

由此可知,所有定义在开区间上的一元初等函数给出的曲线放在三维空间 R^3 中就是 R^3 中母线平行于 x_3 轴的开柱面,它们都是二维 C^∞ 微分流形.

具体例子如下:

例 9 R^3 中母线平行于 x_3 轴的抛物柱面

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_2=x_1^2,(x_1,x_3)\in R^2\}$$

是二维 C^∞ 微分流形.

例 10 R^3 中母线平行于 x_3 轴的正弦柱面

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_2=\sin x_1,(x_1,x_3)\in R^2\}$$

是二维 C^∞ 微分流形.

定理 1.1.8 设 M 是任意一个 n 维向量空间,φ 是同构映射,则 (M,φ) 是 n 维 C^∞ 微分流形.

证明:设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 M 的一组基,任 $x\in M$,有

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$$

定义映射

$$\varphi:M\to\varphi(M)=R^n \text{ 为}$$

$$\varphi(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

易证 φ 是两向量空间 M 与 R^n 的同构映射,即 φ 是一一对应的线性映射,φ 的逆为

$$\varphi^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n.$$

因为(R^n,τ)是拓扑空间,其中 τ 是R^n 的度量诱导的拓扑,即

$$\tau=\{V\subseteq R^n \mid 任\ a\in V,存在开球\ B_\varepsilon^n(a)\subseteq V\}$$

令

$$\tau_1=\{\varphi^{-1}(V)\mid 任\ V\in\tau\}$$

易知,(M,τ_1)是 A_2,T_2 的拓扑空间,并且 φ 是拓扑连续映射. 又对任 $\varphi^{-1}(V)\in\tau_1$,即 $V\in\tau$,有

$$(\varphi^{-1})^{-1}[\varphi^{-1}(V)]=\varphi[\varphi^{-1}(V)]=V\in\tau$$

所以 φ^{-1}也是拓扑连续映射,故 φ 是同胚. 由定理1.1.2 知,(M,φ)是 n 维 C^∞ 微分流形.

定理 1.1.9 设(M,Φ)是 n 维 C^∞ 微分流形,其坐标卡之集是 $\Phi=\{(V_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in A\}$,设 V 是M 的开集,令

$$\Phi_1=\{(V\cap V_\alpha,\varphi_\alpha)\mid V\cap V_\alpha\neq\emptyset,任(V_\alpha,\varphi_\alpha)\in\Phi\}$$

则(V,Φ_1)是 n 维C^∞微分流形,称为(M,Φ)的开子流形.

证明:因为 M 是A_2,T_2 的拓扑空间,V 作为M 的子拓扑空间也是A_2,T_2 的拓扑空间.

任 $P\in V$,则 $P\in$某 $V\cap V_\alpha$,因为

$$\varphi_\alpha:V\cap V_\alpha\rightarrow\varphi_\alpha(V\cap V_\alpha)\subseteq R^n$$

是同胚,故 V 是n 维拓扑流形.

(1) 覆盖性:因为 $M=\bigcup\limits_\alpha V_\alpha$,所以

$$V=V\cap M=V\cap(\bigcup_\alpha V_\alpha)=\bigcup_\alpha(V\cap V_\alpha)$$

(2) 相容性:设 $V\cap V_\alpha,V\cap V_\beta\in\Phi_1$,并且

$$(V\cap V_\alpha)\cap(V\cap V_\beta)\neq\emptyset$$

则 $V_\alpha\cap V_\beta\neq\emptyset$,从而 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ 及 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是 C^∞ 映射,故(V,Φ_1)是 n 维 C^∞微分流形.

例 11 (R^1,I)是一维 C^∞ 微分流形,设 $V=(a,b)$是 R^1 的开区间,而

$$I:(a,b)\rightarrow(a,b)\subset R^1,I(x)=x$$

是恒等映射,则$((a,b),I)$是(R^1,I)的一维开子流形.

例 12　(R^2, I)是二维 C^∞ 微分流形,设

$$V = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < a^2\}$$

是 R^2 的开圆盘(开集),则(V, I)是(R^2, I)的二维开子流形.

定理 1.1.10　设 V 是R^n 的开集.

(1) 设 $I: V \to V \subseteq R^n$ 是恒等映射;

(2) 设 $\varphi: V \to \varphi(V) \subseteq R^n$ 是同胚映射;

(3) 设 $\tilde{\varphi}: V \to \tilde{\varphi}(V) \subseteq R^n$ 是 C^∞ 微分同胚.

令

$$\Phi_1 = \{(V, I)\}, \Phi_2 = \{(V, \varphi)\}, \Phi_3 = \{(V, \tilde{\varphi})\}$$

则(V, Φ_1)和(V, Φ_3)是两个相同的 n 维 C^∞ 微分流形;
(V, Φ_1)和(V, Φ_2)是两个不同的 n 维 C^∞ 微分流形.

证明:显然它们都是 n 维 C^∞ 微分流形. 因为

$$\varphi \circ I^{-1} = \varphi$$

不是 C^∞映射,而

$$\tilde{\varphi} \circ I^{-1} = \tilde{\varphi} \text{ 和 } I \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \tilde{\varphi}^{-1}$$

都是 C^∞映射,所以(V, I)和$(V, \tilde{\varphi})$是相同的 n 维 C^∞ 微分流形;
(V, I)和(V, φ)是不同的 n 维 C^∞ 微分流形.

例 13　设 $\varphi: R^2 \to R^2$ 为

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2) &= (x_1\cos\theta + x_2\sin\theta + a, -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta + b)\\ &\triangleq (y_1, y_2)\end{aligned}$$

是 R^2 上的一般坐标变换(平移加旋转),φ 的逆为

$$\varphi^{-1}(y_1, y_2) = ((y_1 - a)\cos\theta - (y_2 - b)\sin\theta, (y_1 - a)\sin\theta + (y_2 - b)\cos\theta)$$

显然 φ 是 C^∞ 微分同胚,从而(R^2, I)和(R^2, φ)是两个相同的二维 C^∞ 微分流形.

例 14　设 $\varphi: R^1 \to R^1$, $\varphi(x) = x^3$,显然 φ 是同胚映射,所以(R^1, φ)是一维 C^∞ 微分流形:因为

$$\varphi(x) = x^3 \triangleq u, I(x) = x \triangleq v$$

$$v = I \circ \varphi^{-1}(u) = u^{\frac{1}{3}}$$

在 $u = 0$ 点不可导,所以 $I \circ \varphi^{-1}$不是 C^∞ 映射,故(R^1, I)和

(R^1, φ)是两个不同的一维 C^∞ 微分流形.

3. 由多个坐标域构成的 C^∞ 微分流形

例 1 证明 R^2 中的闭圆

$$S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = a^2\}$$

是一维 C^∞ 微分流形.

证法 1:(1) S^1 作为(R^2, I)的子拓扑空间是A_2、T_2空间.

(2) 设

$$\widetilde{V}_i^+ = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_i > 0\}, i = 1,2$$

$$\widetilde{V}_j^- = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_j < 0\}, j = 1,2$$

则 $\widetilde{V}_1^+, \widetilde{V}_1^-, \widetilde{V}_2^+, \widetilde{V}_2^-$ 分别是右半平面,左半平面,上半平面和下半平面. 它们都是 R^2 的开集,设

$$V_i^+ = \widetilde{V}_i^+ \cap S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = a^2, x_i > 0\}$$

$$V_i^- = \widetilde{V}_i^- \cap S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = a^2, x_i < 0\}$$

$i = 1,2$,则 V_1^+、V_1^-、V_2^+、V_2^- 分别是右半圆、左半圆、上半圆和下半圆. 它们都是子拓扑空间 S^1 的开集,就是 S^1 的坐标域,作坐标映射:

$$\varphi_1^\pm : V_1^\pm \to \varphi_1^\pm(V_1^\pm) = (-a, a) \subset R^1$$

$$\varphi_1^\pm(x_1, x_2) = x_2$$

这里 $\varphi_1^\pm$ 是向 x_2 轴上的投影,同理作向 x_1 轴上的投影 $\varphi_2^\pm$,

$$\varphi_2^\pm : V_2^\pm \to \varphi_2^\pm(V_2^\pm) = (-a, a) \subset R^1$$

$$\varphi_2^\pm(x_1, x_2) = x_1$$

则 $\varphi_1^\pm$ 和 $\varphi_2^\pm$ 均为同胚映射,四个坐标卡构成的集合为

$$\Phi_1 = \{(V_1^\pm, \varphi_1^\pm), (V_2^\pm, \varphi_2^\pm)\}$$

(3) 覆盖性:因为

$$R^2 - \{(0,0)\} = \widetilde{V}_1^+ \cup \widetilde{V}_1^- \cup \widetilde{V}_2^+ \cup \widetilde{V}_2^-$$

所以

$$S^1 = S^1 \cap (R^2 - \{(0,0)\})$$

$$= V_1^+ \cup V_1^- \cup V_2^+ \cup V_2^-$$

(4) 相容性：设$(V_1^+, \varphi_1^+), (V_2^-, \varphi_2^-) \in \Phi_1$，因 $V_1^+ \cap V_2^- \neq \emptyset$，$V_1^+ \cap V_2^-$ 是第四象限的圆弧.

对任意 $x = (x_1, x_2) \in V_1^+ \cap V_2^-$，有 $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ 且 $x_1 > 0$，$x_2 < 0$，$\varphi_1^+(x_1, x_2) = x_2 \triangleq u$，$\varphi_2^-(x_1, x_2) = x_1 \triangleq v$，因为

$$v = x_1 = \sqrt{a^2 - x_2^2} = \sqrt{a^2 - u^2}$$

在$(-a, 0)$上是 C^∞ 函数，所以 $\varphi_2^- \circ (\varphi_1^+)^{-1}$是 C^∞ 映射，同理 $\varphi_1^+ \circ (\varphi_2^-)^{-1}$也是 C^∞映射，对其他相交的坐标域上的坐标映射，同理可证都是 C^∞映射，所以(S^1, Φ_1)是一维 C^∞微分流形.

证法 2：(1) S^1 作为(R^2, τ)的子拓扑空间是A_2，T_2 空间.

(2) 圆 S^1 上的任一点 $x = (x_1, x_2)$都可以写成复数的指数形式：

$$x = a(\cos\theta + i\sin\theta) = a\mathrm{e}^{\theta i}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

因为

$$\widetilde{V}_1 \triangleq R^2 - a\mathrm{e}^{oi}, \widetilde{V}_2 \triangleq R^2 - a\mathrm{e}^{\pi i}$$

都是(R^2, τ)的开集，所以

$$V_1 \triangleq S^1 \cap \widetilde{V}_1 = S^1 - a\mathrm{e}^{oi}$$

$$V_2 \triangleq S^1 \cap \widetilde{V}_2 = S^1 - a\mathrm{e}^{\pi i}$$

是子拓扑空间 S^1 的相对开集，也就是 S^1 的坐标域. V_1 和 V_2 都是开圆. 定义坐标映射如下：

$$\varphi_1 : V_1 \to \varphi_1(V_1) = (0, 2\pi) \subset R^1$$

$$\varphi_1(a\mathrm{e}^{\theta i}) = \theta$$

$$\varphi_2 : V_2 \to \varphi_2(V_2) = (\pi, 3\pi) \subset R^1$$

$$\varphi_2(a\mathrm{e}^{\eta i}) = \eta$$

则 φ_1 和 φ_2 是同胚映射，坐标卡之集为：

$$\Phi_2 = \{(V_1, \varphi_1), (V_2, \varphi_2)\}$$

(3) 覆盖性：显然有

$$S^1 = V_1 \cup V_2$$

(4) 相容性:因为

$$V_1 \cap V_2 = S^1 - a e^{oi} - a e^{\pi i} \neq \phi$$

任 $x = a e^{\theta i} \in V_1 \cap V_2$,有 $\theta \neq 0, \pi$. 还有

$$\eta = \begin{cases} \theta + 2\pi, & 当\ \theta \in (0, \pi) 时 \\ \theta, & 当\ \theta \in (\pi, 2\pi) 时 \end{cases}$$

显然 η 是 θ 的一元 C^∞ 函数,所以 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 是 C^∞ 映射,同理 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ 也是 C^∞ 映射,所以 (S^1, Φ_2) 是一维 C^∞ 微分流形.

注 (S^1, Φ_1) 和 (S^1, Φ_2) 是相同的一维 C^∞ 微分流形,即有 $\Phi_1 = \Phi_2$.

证明:设 $(V_1, \varphi_1) \in \Phi_2$, $(V_1^+, \varphi_1^+) \in \Phi_1$,则 $V_1 \cap V_1^+ \neq \phi$, $V_1 \cap V_1^+$ 是右半圆除掉 $a e^{oi} = (a, 0)$ 点.

对任意 $x = a e^{\theta i} \in V_1 \cap V_1^+$,有 $x_1 = a\cos\theta > 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$. 并且有:

$$\varphi_1(a e^{\theta i}) = \theta \triangleq u,\ \varphi_1^+(a e^{\theta i}) = a\sin\theta \triangleq v$$

从而

$$\varphi_1^+ \circ \varphi_1^- : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \to (0, a) \cup (-a, 0)$$

$$\varphi_1^+ \circ \varphi_1^{-1}(u) = a\sin u$$

即 $v = a\sin u$ 是一元 C^∞ 函数,所以 $\varphi_1^+ \circ \varphi_1^-$ 是 C^∞ 函数,又

$$u = \arcsin \frac{v}{a}$$

是 C^∞ 函数,即 $\varphi_1 \circ (\varphi_1^+)^{-1}$ 是 C^∞ 函数. 同理可证 (V_1, φ_1) 与 Φ_1 中的其他坐标卡都是 C^∞ 相容的,(V_2, φ_2) 也与 Φ_1 中的坐标卡都是 C^∞ 相容的,所以 $\Phi_1 = \Phi_2$.

例 2 证明 R^3 中的闭球面

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2\}$$

是二维 C^∞ 微分流形.

证法 1:(1) S^2 作为 (R^3, τ) 的子拓扑空间是 A_2, T_2 空间.

(2) 设

$$\widetilde{V}_i^+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_i > 0\}$$

$$\widetilde{V}_i^- = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_i < 0\}$$

$i=1,2,3$. $\widetilde{V}_3^+$ 和 $\widetilde{V}_3^-$ 分别是上半空间和下半空间. $\widetilde{V}_i^+$ 和 $\widetilde{V}_i^-$ 都是 R^3 的开集,从而

$$V_i^{\pm} \triangleq S^2 \cap \widetilde{V}_i^{\pm} \qquad (i=1,2,3)$$

是子拓扑空间 S^2 的坐标域. V_1^+、V_1^-、V_2^+、V_2^-、V_3^+ 和 V_3^- 分别是前半球面、后半球面、右半球面、左半球面、上半球面和下半球面.

定义坐标映射如下:

$$\varphi_1^{\pm} : V_1^{\pm} \to \varphi_1^{\pm}(V_1^{\pm}) = B_a^2(0) \subset R^2$$

$$\varphi_1^{\pm}(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\Delta}{=} (x_2, x_3)$$

即 $\varphi_1^{\pm}$ 是向 x_2Ox_3 坐标平面上的投影,同理

$$\varphi_2^{\pm}(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\Delta}{=} (x_1, x_3), \varphi_3^{\pm}(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\Delta}{=} (x_1, x_2)$$

易见 $\varphi_i^{\pm}(i=1,2,3)$都是同胚映射,坐标卡之集为

$$\Phi_1 = \{(V_1^{\pm}, \varphi_1^{\pm}), (V_2^{\pm}, \varphi_2^{\pm}), (V_3^{\pm}, \varphi_3^{\pm})\}.$$

(3) 覆盖性:因为

$$R^3 - \{(0,0,0)\} = \bigcup_{i=1}^{3} \widetilde{V}_i^{\pm}$$

所以

$$S^2 = S^2 \cap (R^3 - \{(0,0,0)\})$$
$$= V_1^+ \cup V_1^- \cup V_2^+ \cup V_2^- \cup V_3^+ \cup V_3^- .$$

(4) 相容性:设$(V_1^+, \varphi_1^+), (V_2^-, \varphi_2^-) \in \Phi_1$,则 $V_1^+ \cap V_2^- \neq \emptyset$, $V_1^+ \cap V_2^-$ 是球面 S^2 上的第四象限与第八象限的部分.

任$(x_1, x_2, x_3) \in V_1^+ \cap V_2^-$,有 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$ 且 $x_1 > 0$, $x_2 < 0$.

$$\varphi_1^+(V_1^+ \cap V_2^-) = \{(x_2, x_3) \mid x_2^2 + x_3^2 < a^2 \text{ 且 } x_2 < 0\} \subset R^2$$

$$\varphi_1^+(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3) \triangleq (u_1, u_2)$$

$$\varphi_2^-(V_1^+\cap V_2^-)=\{(x_1,x_3)\mid x_1^2+x_3^2<a^2 \text{ 且 } x_1>0\}\subset R^2$$

$$\varphi_2^-(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_3)\triangleq(v_1,v_2)$$

则

$$\varphi_2^-\circ(\varphi_1^+)^{-1}:\varphi_1^+(V_1^+\cap V_2^-)\to\varphi_2^-(V_1^+\cap V_2^-)$$

因为

$$\begin{cases}v_1=x_1=\sqrt{a^2-x_2^2-x_3^2}=\sqrt{a^2-u_1^2-u_2^2}\\ v_2=x_3=u_2\end{cases}$$

在左半圆 $\varphi_1^+(V_1^+\cap V_2^-)=\{(u_1,u_2)\mid u_1^2+u_2^2<a^2 \text{ 且 } u_2<0\}$ 上是 C^∞ 的二元函数,所以 $\varphi_2^-\circ(\varphi_1^+)^{-1}$ 是 C^∞ 映射,同理 $\varphi_1^+\circ(\varphi_2^-)^{-1}$ 也是 C^∞ 映射,即(V_1^+,φ_1^+)与(V_2^-,φ_2^-)是 C^∞ 相容的,同理可证其他的坐标卡都是 C^∞ 相容的,故(S^2,Φ_1)是二维 C^∞ 微分流形.

证法 2 (球极投影法):

(1) S^2 作为(R^3,τ)的子拓扑空间是 A_2,T_2 空间.

(2) 因为

$$\widetilde{V}_1=R^3-\{(0,0,-a)\},\widetilde{V}_2=R^3-\{(0,0,a)\}$$

是 R^3 的开集,所以

$$V_1\triangleq S^2\cap\widetilde{V}_1=S^2-\{(0,0,-a)\}$$
$$=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in S^2\mid x_3>-a\}$$
$$V_2\triangleq S^2\cap\widetilde{V}_2=S^2-\{(0,0,a)\}$$
$$=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in S^2\mid x_3<a\}$$

是子拓扑空间 S^2 的坐标域. V_1 是球面上除去南极 $A(0,0,-a)$ 的所有点构成的集合,V_2 是球面上除去北极 $B(0,0,a)$的所有点构成的集合. 坐标映射定义为

$$\varphi_1:V_1\to\varphi_1(V_1)=R^2$$

对任一点 $x=(x_1,x_2,x_3)\in V_1$,直线 xA 交 x_1Ox_2 平面于$(u_1,u_2,0)$点.

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3)\xlongequal{\Delta}(u_1,u_2)\triangleq u$$

$$\varphi_2:V_2\to\varphi_2(V_2)=R^2$$

对任一点 $x=(x_1,x_2,x_3)\in V_2$，直线 xB 交 x_1Ox_2 平面于 $(v_1,v_2,0)$点.

$$\varphi_2(x_1,x_2,x_3)\overset{\triangle}{=}(v_1,v_2)\triangleq v$$

设 x 在 x_1Ox_2 坐标平面上的投影为 $\bar{x}=(x_1,x_2,0)\triangleq(x_1,x_2)$

因为矢量 $\overrightarrow{Ou}$ 与 $\overrightarrow{O\bar{x}}$ 共线，所以可设

$$(u_1,u_2)=t(x_1,x_2)=(tx_1,tx_2)$$

其中 $t\neq 0$，从而

$$\bar{x}-u=((1-t)x_1,(1-t)x_2)$$

显然 $\mathrm{Rt}\triangle u\bar{x}x\backsim\mathrm{Rt}\triangle uOA$，所以

$$\frac{x_3}{a}=\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}-t\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{t\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\frac{1}{t}-1$$

从而得

$$t=\frac{a}{a+x_3}$$

以及

$$u_1=tx_1=\frac{ax_1}{a+x_3},u_2=tx_2=\frac{ax_2}{a+x_3}\qquad(1.1.1)$$

故坐标映射为

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{ax_1}{a+x_3},\frac{ax_2}{a+x_3}\right)$$

其中 $a+x_3>0$，同理可得

$$v_1=\frac{ax_1}{a-x_3},\quad v_2=\frac{ax_2}{a-x_3}\qquad(1.1.2)$$

所以另一坐标映射为

$$\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{ax_1}{a-x_3},\frac{ax_2}{a-x_3}\right)$$

其中 $a-x_3>0$，现在求 φ_1^{-1}，由 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2$ 及式(1.1.1)得

$$u_1^2+u_2^2=\frac{a^2(x_1^2+x_2^2)}{(a+x_3)^2}=\frac{a^2(a^2-x_3^2)}{(a+x_3)^2}$$

$$=\frac{a^2(a-x_3)}{a+x_3}=a^2\left(-1+\frac{2a}{a+x_3}\right)$$

所以

$$a+x_3=\frac{2a^3}{u_1^2+u_2^2+a^2}$$

从而

$$\frac{1}{t}=\frac{a+x_3}{a}=\frac{2a^2}{u_1^2+u_2^2+a^2}$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{u_1}{t}=\dfrac{2a^2u_1}{u_1^2+u_2^2+a^2} \\ x_2=\dfrac{u_2}{t}=\dfrac{2a^2u_2}{u_1^2+u_2^2+a^2} \\ x_3=\dfrac{a(a^2-u_1^2-u_2^2)}{u_1^2+u_2^2+a^2} \end{cases} \tag{1.1.3}$$

故

$$\varphi_1^{-1}(u_1,u_2)=\left(\frac{2a^2u_1}{u_1^2+u_2^2+a^2},\frac{2a^2u_2}{u_1^2+u_2^2+a^2},\frac{a(a^2-u_1^2-u_2^2)}{u_1^2+u_2^2+a^2}\right)$$

显然，φ_1 和 φ_1^{-1} 是连续映射(因分量连续)，故 φ_1 是同胚，同理 φ_2 也是同胚映射. 坐标卡之集为

$$\Phi_2=\{(V_1,\varphi_1),(V_2,\varphi_2)\}$$

(3) 覆盖性：显然有

$$S^2=V_1\cup V_2$$

(4) 相容性：因为 $V_1\cap V_2\neq\phi$，

对任意 $x=(x_1,x_2,x_3)\in V_1\cap V_2$，有 $x\neq(0,0,\pm a)$，且有 $\varphi_1(V_1\cap V_2)=R^2-\{(0,0)\}=\varphi_2(V_1\cap V_2)\subset R^2$，而映射

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(V_1\cap V_2)\rightarrow\varphi_2(V_1\cap V_2)$$

的分量函数可由式(1.1.2)及式(1.1.3)解得：

$$v_1=\frac{a^2u_1}{u_1^2+u_2^2},\quad v_2=\frac{a^2u_2}{u_1^2+u_2^2}$$

因在 $\varphi_1(V_1\cap V_2)=R^2-\{(0,0)\}$ 上，$u_1^2+u_2^2\neq 0$，所以 v_1,v_2 是 u_1 和 u_2 的二元 C^∞ 函数，所以 $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ 是 C^∞ 映射，同理

$$u_1=\frac{a^2v_1}{v_1^2+v_2^2},\quad u_2=\frac{a^2v_2}{v_1^2+v_2^2}$$

也是二元 C^∞ 函数，所以 $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$ 是 C^∞ 映射，故 (S^2,Φ_2) 是二维 C^∞ 微分流形.

注 可证得：(S^2,Φ_1) 和 (S^2,Φ_2) 是相同的二维 C^∞ 微分流形.

例3 实数域 R 上的全体 $n\times n$ 阶矩阵构成的向量空间 $M_{nn}(R)$ 是 n^2 维 C^∞ 微分流形，同胚映射为

$$\varphi:M_{nn}(R)\to\varphi(M_{nn}(R))=R^{n^2}$$
$$\varphi(A)=(a_{11},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{n1},\cdots,a_{nn})$$

其中 $A=(a_{ij})\in M_{nn}(R)$. 设

$$GL(n;R)=\{A\in M_{nn}(R)\mid\det A\neq 0\}$$

证明 $GL(n;R)$ 是 $M_{nn}(R)$ 的 n^2 维 C^∞ 开子流形.

证明：$GL(n;R)$ 是 $M_{nn}(R)$ 的开集

$\Leftrightarrow M_{nn}(R)-GL(n;R)=\{A\in M_{nn}(R)\mid\det A=0\}$ 是闭集. 又行列式是 $M_{nn}(R)$ 上的实值函数，即

$$\det\triangleq f:M_{nn}(R)\to R$$

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\triangleq f(a_{11},\cdots,a_{nn})$$

是关于 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{nn}$ 的 n 次多项式，所以 f 是连续函数，并且

$$A\in M_{nn}(R)-GL(n;R)\Leftrightarrow\det A=f(a_{11},\cdots,a_{nn})=0$$

所以

$$M_{nn}(R)-GL(n;R)=f^{-1}(0),$$

而 $\{0\}$ 是 R^1 的闭集，又 f 连续，所以

$$f^{-1}(0)=M_{nn}(R)-GL(n;R)$$

是闭集，从而 $GL(n;R)$ 是 $M_{nn}(R)$ 的开集

例 4 实数域 R 上的全体 $k\times n$ 阶矩阵构成的向量空间 $M_{kn}(R)$ 是 kn 维 C^∞ 微分流形，设 $k\leqslant n$，并令

$$F(k;n)=\{A\in M_{kn}(R)\mid 秩\ A=k\}$$

证明 $F(k;n)$ 是 $M_{kn}(R)$ 的 kn 维开子流形.

证明： 因为 $F(k;n)$ 是 $M_{kn}(R)$ 的开集.

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow M_{kn}(R)-F(k;n)&=\{A\in M_{kn}(R)\mid 秩\ A<k\}\\&=\{B\in M_{kk}(R)\subset M_{kn}(R)\mid \det B=0\}\end{aligned}$$

是闭集，由例 3 知结论成立，所以 $F(k;n)$ 是 $M_{kn}(R)$ 的 kn 维 C^∞ 微分流形.

例 5 设 (M_1,Φ_1) 和 (M_2,Φ_2) 分别是 n 维和 m 维 C^∞ 微分流形，在积拓扑空间 $M_1\times M_2$ 上定义微分构造如下：

$$\Phi=\{(V_\alpha\times W_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)\mid(V_\alpha,\varphi_\alpha)\in\Phi_1,(W_\beta,\psi_\beta)\in\Phi_2\}$$

其中对任 $(v,w)\in V_\alpha\times W_\beta$，有

$$(\varphi_\alpha,\psi_\beta)(v,w)\overset{\Delta}{=}(\varphi_\alpha(V),\psi_\beta(w))\tag{1.1.4}$$

证明 $(M_1\times M_2,\Phi)$ 是 $n+m$ 维 C^∞ 微分流形，称为 M_1 和 M_2 的积流形.

证明：(1) 因 M_1 和 M_2 是 A_2,T_2 的拓扑空间，易知，积拓扑空间 $M_1\times M_2$ 是 A_2,T_2 空间.

(2) $(\varphi_\alpha\times\psi_\beta):V_\alpha\times W_\beta\rightarrow(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)(V_\alpha\times W_\beta)=\varphi_\alpha(V_\alpha)\times\psi_\beta(W_\beta)\subset R^n\times R^m=R^{n+m}$ 是同胚.

因为

$$\begin{aligned}(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)(v,w)&=(\varphi_\alpha(v),\psi_\beta(w))\\&\triangleq(x,y)\in\varphi_\alpha(V_\alpha)\times\psi_\beta(W_\beta)\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}(\varphi_\alpha^{-1}\times\psi_\beta^{-1})(x,y)&=(\varphi_\alpha^{-1}(x),\psi_\beta^{-1}(y))\\&=(\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha(v),\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\beta(w))\\&=(v,w)\end{aligned}$$

所以

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)^{-1} = \varphi_\alpha^{-1} \times \psi_\beta^{-1} \tag{1.1.5}$$

即

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)^{-1}(x, y) = (\varphi_\alpha^{-1}(x), \psi_\beta^{-1}(y))$$

所以 $\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ 是一一对应的映射,因分量 $\varphi_\alpha, \psi_\beta$ 及 $\varphi_\alpha^{-1}, \psi_\beta^{-1}$ 连续,易知,$\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ 及 $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)^{-1}$ 连续,所以 $\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ 是同胚映射.

(3) 覆盖性:因为

$$M_1 = \bigcup_\alpha V_\alpha, \quad M_2 = \bigcup_\beta W_\beta$$

所以

$$M_1 \times M_2 = \bigcup_\alpha V_\alpha \times \bigcup_\beta W_\beta = \bigcup_{\alpha,\beta} V_\alpha \times W_\beta$$

(4) 相容性:设

$$(V_\alpha \cap V_{\bar{\alpha}}) \neq \Phi \text{且 } W_\beta \cap W_{\bar{\beta}} \neq \Phi$$

易得 $(V_\alpha \times W_\beta) \cap (V_{\bar{\alpha}} \times W_{\bar{\beta}}) \neq \Phi$,所以有

$$\varphi_{\bar{\alpha}} \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha \circ \varphi_{\bar{\alpha}}^{-1}, \psi_{\bar{\beta}} \circ \psi_\beta^{-1}, \psi_\beta \circ \psi_{\bar{\beta}}^{-1}$$

都是 C^∞ 映射,从而

$$\begin{aligned}
&(\varphi_{\bar{\alpha}} \times \psi_{\bar{\beta}}) \circ (\varphi_\alpha \times \psi_\beta)^{-1} \\
&= (\varphi_{\bar{\alpha}} \times \psi_{\bar{\beta}}) \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times \psi_\beta^{-1}) \\
&= (\varphi_{\bar{\alpha}} \circ \varphi_\alpha^{-1}) \times (\psi_{\bar{\beta}} \circ \psi_\beta^{-1})
\end{aligned}$$

是 C^∞ 映射,同理 $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_{\bar{\alpha}} \times \psi_{\bar{\beta}})^{-1}$ 也是 C^∞ 映射,故 $(M_1 \times M_2, \Phi)$ 是 $n+m$ 维 C^∞ 微分流形.

例 6 以下是积流形的几个例子:

(1) 平面 R^2 中的开矩形 $M = (a, b) \times (c, d)$ 是二维 C^∞ 积流形;

(2) 空间 R^3 中的开长方体 $M = (a, b) \times (c, d) \times (e, f)$ 是三维 C^∞ 积流形;

(3) 空间 R^3 中的圆柱面 $M = S^1 \times R^1$ 是二维 C^∞ 积流形;

(4) 空间 R^3 中的圆环面 $M = S^1 \times S^1$ 是二维 C^∞ 积流形;

(5) n 维数空间 $R^n = R^1 \times \cdots \times R^1$ 是 n 维 C^∞ 积流形;

(6) 椭圆

$$M_1=\left\{(x_1,x_2)\in R^2\,\middle|\,\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1\right\}$$

是一维 C^∞ 微分流形，椭圆柱面

$$M^2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3\,\middle|\,\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1,x_3\in R^1\right\}=M_1\times R^1$$

是二维 C^∞ 积流形；

(7) 双曲线

$$M_2=\left\{(x_1,x_2)\in R^2\,\middle|\,\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1\right\}$$

是一维 C^∞ 微分流形，双曲柱面

$$M^2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3\,\middle|\,\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1,x_3\in R^1\right\}=M_2\times R^1$$

是二维 C^∞ 积流形；

(8) 抛物线

$$M_3=\{(x_1,x_2)\in R^2\mid x_2^2=2px_1\}$$

是一维 C^∞ 微分流形，抛物柱面

$$M^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3\mid x_2^2=2px_1,x_3\in R^1\}=M_3\times R^1$$

是二维 C^∞ 积流形.

例 7 n 维实射影流形 $P^n(R)$：设 $X=R^{n+1}-\{0\}$，在拓扑空间 (X,τ) 中定义等价关系“～”：

任 $x=(x_1,\cdots,x_{n+1}),y=(y_1,\cdots,y_{n+1})\in X,x\sim y.$

$\Leftrightarrow$存在 $t\neq0$，使 $y=tx$（x 固定时，y 随 t 而变动），即

$$(y_1,\cdots,y_{n+1})=(tx_1,\cdots,tx_{n+1})$$

设

$$\pi:X\to X/\sim\triangleq P^n(R),\pi(x)=[x]$$

是商映射，$P^n(R)$的拓扑取为商拓扑 $\tilde{\tau}$，即

$$\tilde{\tau}=\{W\subset P^n(R)\mid\pi^{-1}(W)\in\tau\}$$

可以证明，$P^n(R)$是 n 维 C^∞ 微分流形，叫 n 维实射影流形.

注 $n=1$ 时，$P^1(R)$就是 R^2 中过原点的所有直线（除原点外）构成的空间；$n=2$ 时，$P^2(R)$就是 R^3 中过原点的所有直线

(除原点外)构成的空间.

例 8 Grassmann 流形 $G(k;n)$:因为

$$F(k,n)\triangleq\{A=(a_{ij})\in M_{kn}(R)\mid \text{秩}\ A=k,0<k<n\}$$

是 $M_{kn}(R)$的 kn 维 C^∞ 开子流形,在 $F(k;n)$中定义等价关系"$\sim$":

任 $A,B\in F(k;n)$, $A\sim B$.

$\Leftrightarrow$存在 $P\in LG(k;R)$,使 $B=PA$.

可以证明,$F(k;n)/\sim\triangleq G(k;n)$是 $k(n-k)$维 C^∞微分流形,称为 Grassmann 流形.

注 $G(k;n)$是 R^n 中过原点的所有 k 维平面(子空间)构成的集合;$k=1,n=2,G(1;2)=P^1(R)$就是 R^2 中的一维实射影流形.

注 例 7 和例 8 的证明见《微分流形与黎曼几何》(纪永强著,1994 年 7 月出版,陕西师范大学出版社).

例 9 平面 R^2 中的双纽线

$$\begin{aligned}M&=\{x=(x_1,x_2)\in R^2\mid (x_1^2+x_2^2)^2=x_1^2-x_2^2\}\\&=\{(\rho,\theta)\in R^2\mid \rho^2=\cos2\theta\}\end{aligned}$$

作为 R^2 的子拓扑空间不是 1 维拓扑流形,从而不是 C^∞ 微分流形.

证明:反证:若 M 是一维拓扑流形,则对于 $0=(0,0)\in M$,存在 0 点的开邻域 $V=M\cap\widetilde{V}$ 及同胚映射:

$$\varphi:V\to\varphi(V)=(a,b)\subset R^1$$

其中 $\widetilde{V}=B_\varepsilon^2(0)$是以 0 为中心,以 ε 为半径的开圆. 因为

$$\varphi(0)=C\in(a,b)$$

所以

$$\varphi:V-\{0\}\to(a,c)\cup(c,b)$$

应还是同胚,但 $V-\{0\}$有四个道路连通分支,而$(a,c)\cup(c,b)$有两个道路连通分支,这与 φ 是同胚映射矛盾,故 M 不是一维拓扑流形.

1.2 线性联络的定义及例子

1. 张量场的变换

设 M^n 是 n 维 C^∞ 微分流形，$(V,\varphi,x_1,\cdots,x_n)$ 是 M^n 的坐标系，φ 是坐标映射，设 r_i 是 R^n 到 R 的第 i 个投影函数，即

$$r_i(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n)=a_i,\quad i=1,\cdots,n$$

于是 M^n 上的局部坐标函数 x_i 为

$$x_i=r_i\circ\varphi,\quad i=1,\cdots,n \tag{1.2.1}$$

设 $C^\infty(M;R)$ 是 M^n 上全体 C^∞（光滑）函数构成的集合，则 $x_i\in C^\infty(V;R)$，V 上的切标架场为 $\frac{\partial}{\partial x_i}$：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}:C^\infty(V;R)\to C^\infty(V;R),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f\overset{\Delta}{=}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}\circ\varphi \tag{1.2.2}$$

其中 $f\in C^\infty(V;R)$，易证 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 满足切向量场的两个条件：

(i) $\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1\frac{\partial}{\partial x_i}f_1+\lambda_2\frac{\partial}{\partial x_i}f_2,\quad i=1,\cdots,n$

(ii) $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1\cdot f_2)=f_1\frac{\partial}{\partial x_i}f_2+f_2\frac{\partial}{\partial x_i}f_1,\quad i=1,\cdots,n$

其中 $f_1,f_2\in C^\infty(V;R)$，$\lambda_1,\lambda_2\in R$，并且 $\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ 线性无关，故 $\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ 是 V 上的切标架场. 设 $C^\infty(M;T(M))$ 是 M^n 上的全体光滑切向量场构成的集合，其中 $T(M)$ 是 M^n 的切丛，即

$$T(M)=\bigcup_{P\in M}T_P(M)=\{X_P\in T_P(M)\mid P\in M\}$$

是 M 上每点所有切向量构成的集合，$T(M)$ 是 $2n$ 维光滑流形. 任 $X\in C^\infty(M;T(M))$，有

$$X=\sum_{i=1}^{n}X^i\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.2.3}$$

其中 $X^i = X(x_i) \in C^\infty(V;R), i = 1,\cdots,n$. 显然,由式(1.2.1)及式(1.2.2),得$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}$. V 上的余切标架场为 $\mathrm{d}x_i$:

$$\mathrm{d}x_i: C^\infty(V;T(V)) \to C^\infty(V;R), \mathrm{d}x_i(X) \triangleq X(x_i) \tag{1.2.4}$$

其中 X 是 V 上的光滑切向量场,即 $X \in C^\infty(V;T(V))$. 易证 $\mathrm{d}x_i$ 满足余切向量场的条件:

$$\mathrm{d}x_i(f_1X_1 + f_2X_2) = f_1\mathrm{d}x_i(X_1) + f_2\mathrm{d}x_i(X_2), i = 1,\cdots,n$$

其中 $X_1, X_2 \in C^\infty(V;T(V)); f_1, f_2 \in C^\infty(V;R)$, 并且 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 线性无关. 易见 $\mathrm{d}x_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}, \delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0(i \neq j)$. 所以$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$与$\{\mathrm{d}x_i\}$是对偶标架场.

设$(V,\varphi,x_1,\cdots,x_n)$和$(W,\psi,y_1,\cdots,y_n)$是$M^n$ 上P 点的两个相交坐标系.

(1) 设流形 M^n 上的(1,0) 型张量场(切向量场)X 在两坐标系下的表达式分别为

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ 和 } X = \sum_j \widetilde{X}^j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

其中 $X^i = X(x_i), \widetilde{X}^j = X(y_j) \in C^\infty(V \cap W;R)$,则分量(坐标)$X^i$ 和 $\widetilde{X}^j$ 之间的变换公式为

$$\widetilde{X}^j = \sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} X^i, \quad j = 1,\cdots,n \tag{1.2.5}$$

其中$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{\partial(y_j \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \circ \varphi \in C^\infty(V \cap W;R)$,上式及今后约定,求和符号下面的 i 或j,k 等表示从 1 到 n 求和.

(2) 设 M^n 上的(0,1) 型张量场(余切向量场)θ 在两坐标系下的表达式分别为

$$\theta = \sum_i \theta_i \mathrm{d}x_i \text{ 和 } \theta = \sum_j \bar{\theta}_j \mathrm{d}y_i$$

其中 $\theta_i = \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \bar{\theta}_j = \theta\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \in C^\infty(V \cap W;R)$,则 θ_i 与$\bar{\theta}_j$ 间

的变换为

$$\bar{\theta}_j = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\theta_i, \quad j = 1, \cdots, n \tag{1.2.6}$$

注 切标架场$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$和$\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\right\}$之间及余切标架场$\{dx_i\}$和$\{dy_j\}$之间的变换公式为：

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad dy_j = \sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}dx_i \tag{1.2.7}$$

$j = 1, 2, \cdots, n$.

(3) 设 M^n 上的(r,s)型张量场 T 在两坐标系下的表达式分别为

$$T = \sum_{i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s} t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\otimes dx_{j_1}\otimes\cdots\otimes dx_{j_s}$$

和

$$T = \sum_{k_1,\cdots,k_r,l_1,\cdots,l_s} \tilde{t}^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\frac{\partial}{\partial y_{k_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial y_{k_r}}\otimes dy_{l_1}\otimes\cdots\otimes dy_{l_s}$$

则分量 $t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 和 $\tilde{t}^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}$ 之间的变换公式是

$$\tilde{t}^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} = \sum_{i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s}\frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial y_{k_r}}{\partial x_{i_r}}\cdot\frac{\partial x_{j_1}}{\partial y_{l_1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial x_{j_s}}{\partial y_{l_s}}\cdot t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \tag{1.2.8}$$

此式也是经典微分几何中定义(r,s)型张量场的根据. 当 $r = 1$, $s = 0$ 就是式(1.2.5),当 $r = 0, s = 1$ 就是式(1.2.6).

特别地,对 M^n 上的(1,2)型张量场 T, T 在两坐标系下的表达式分别为

$$T = \sum_{i,j,k} t^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x_i}\otimes dx_j\otimes dx_k \text{ 和 } T = \sum_{l,m,s}\tilde{t}^l_{ms}\frac{\partial}{\partial y_l}\otimes dy_m\otimes dy_s.$$

则 t^i_{jk} 与 $\tilde{t}^l_{ms}$ 之间的变换公式为

$$\tilde{t}^l_{ms} = \sum_{i,j,k}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial x_j}{\partial y_m}\frac{\partial x_k}{\partial y_s}\cdot t^i_{jk} \tag{1.2.9}$$

注 $$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\otimes \mathrm{d}x_j\otimes \mathrm{d}x_k\right)(\omega,X,Y)$$
$$=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_j(X)\mathrm{d}x_k(Y)=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)X(x_j)Y(x_k)$$

2. 线性联络的定义及线性联络的局部表达式

定义 1.2.1 流形 M^n 上的线性联络(仿射联络) ∇是一个映射 $\nabla: C^\infty(M;T(M))\times C^\infty(M;T(M))\to C^\infty(M;T(M))$ 满足

(1) $\nabla_X(fY+gZ)=(Xf)Y+f\nabla_XY+(Xg)Z+g\nabla_XZ$

(2) $\nabla_{(fX+gY)}Z=f\nabla_XZ+g\nabla_XZ$

其中 $f,g\in C^\infty(M;R)$;$X,Y,Z\in C^\infty(M;T(M))$, ∇_XY 称为切向量场 Y 沿切向量场 X 的协变微商.

设$(V,\varphi,x_1,\cdots,x_n)$是流形 M^n 上 P 点的坐标系, 我们用 $X_1,\cdots,X_n$ 表示 V 上的一般切标架场, 对偶为 $\omega^1,\cdots,\omega^n$, 即 $\omega^i(X_j)=\delta^i_j$;用 $e_1,\cdots,e_n$ 表示 V 上的标准正交切标架场. 对偶为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$,即 $\omega_i(e_j)=\delta_{ij}$;$V$ 上的坐标切标架场为$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$, 对偶为 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$,即 $\mathrm{d}x_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\delta_{ij}$.

对任意 $X,Y\in C^\infty(M;T(M))$,有

$$X=\sum_i\alpha^iX_i,\quad Y=\sum_j\beta^jX_j$$

其中 $\alpha^i=\omega^i(X),\beta^j=\omega^j(Y)\in C^\infty(V;R)$,设

$$\nabla_{X_i}X_j=\sum_k\Gamma^k_{ij}X_k,\quad i,j=1,\cdots,n \tag{1.2.10}$$

其中 $\Gamma^k_{ij}\in C^\infty(V;R)$,$\Gamma^k_{ij}$ 称为线性联络∇在坐标域 V 上的联络系数(christoffel 符号). 由定义 1.2.1 得

$$\nabla_XY=\sum_k\left(X\beta^k+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\alpha^i\beta^j\right)X_k$$
$$=\sum_k\left[\sum_i\alpha^iX_i(\beta^k)+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\alpha^i\beta^j\right]X_k \tag{1.2.11}$$

当 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ 时，$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$，(1.2.11) 变为

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1.2.12)$$

特别 $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ 时，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y = \sum_k \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1.2.13)$$

当 $X_i = e_i$ 时，$X = \sum_i X^i e_i$，$Y = \sum_j Y^j e_j$，

$$\nabla_{e_i} Y = \sum_k \left(e_i(Y^k) + \sum_j \Gamma_{ij}^k Y^j \right) e_k \quad (1.2.14)$$

定理 1.2.1 设 ∇ 是流形 M^n 上的线性联络，(V, φ, x_i) 和 (W, φ, y_i) 是 P 点的两个坐标系，设

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}} \frac{\partial}{\partial y_\beta} = \sum_r \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^r \frac{\partial}{\partial y_r}$$

则 Γ_{ij}^k 与 $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^r$ 之间的变换公式为

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^r = \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \Gamma_{ij}^k + \sum_j \frac{\partial y_r}{\partial x_j} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \quad (1.2.15)$$

证明：由式(1.2.7) 及定义 1.2.1 得

$$\begin{aligned}
\sum_r \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^r \frac{\partial}{\partial y_r} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}} \frac{\partial}{\partial y_\beta} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}} \left(\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \sum_r \frac{\partial y_r}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_r} + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \nabla_{\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_r \sum_j \frac{\partial y_r}{\partial x_j} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \frac{\partial}{\partial y_r} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= \sum_r \left[\sum_j \frac{\partial y_r}{\partial x_j} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \Gamma_{ij}^k \right] \frac{\partial}{\partial y_r}
\end{aligned}$$

比较两边便得式(1.2.15).

3. 线性联络举例

例 1　设 $M^n = R^n, Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i} \in C^\infty(R^n; T(R^n))$，其中 $Y^i = Y(x_i) \in C^\infty(R^n; R)$，任 $X \in C^\infty(R^n; T(R^n))$，定义联络 ∇ 为

$$\nabla_X Y \triangleq \sum_i X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.2.16}$$

若 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} Y = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_j}(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$，则 ∇ 是 R^n 上的线性联络.

证明： 设 $Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x_i} \in C^\infty(R^n; T(R^n))$；$f, g \in C^\infty(R^n; R)$，则

(1) $$\nabla_X(fY + gZ) = \nabla_X \sum_i (fY^i + gZ^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= \sum_i X(fY^i + gZ^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= \sum_i [f(XY^i) + Y^i(Xf) + g(XZ^i) + Z^i(Xg)] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= f\nabla_X Y + (Xf)Y + g\nabla_X Z + (Xg)Z$$

(2) $$\nabla_{fX+gY} Z = \sum_i (fX + gY) Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= \sum_i [f(XZ^i) + g(YZ^i)] \frac{\partial}{\partial x_i} = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

由定义 1.2.1 知，∇ 是 R^n 上的线性联络，又因为

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(1) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0, \text{即 } \Gamma_{ij}^k = 0 \tag{1.2.17}$$

因此 R^n 上的这个联络 ∇ 称为平坦联络，R^n 叫平坦欧氏空间.

注　因 R^n 上有一个整体坐标系，若定义 $\Gamma_{ij}^k = 0$，则由式 (1.2.12) 得 $\nabla_X Y = \sum_i X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$，从而 ∇ 为 R^n 上的线性联络.

注　当 $M^n = R^n$ 时，$\frac{\partial}{\partial x_i} = (0, \cdots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \cdots, 0)$，$i = 1, \cdots,$

n 是标准正交基. 对任意 $Y \in C^{\infty}(R^n;T(R^n))$,有

$$Y = (Y^1,\cdots,Y^n) = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

而 $\frac{\partial}{\partial x_j}Y^i$ 就是坐标函数 Y^i 沿切方向 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 求导.

例 2 设 $M = H^2 = \{(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_2 > 0\}$ 叫 Poincare 双曲上半平面,因为 H^2 只有一个坐标域,故可用 Γ_{ij}^k 来定义 H^2 上的线性联络 ∇:

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{x_2}, \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{x_2}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0 \tag{1.2.18}$$

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$,从而 ∇ 定义为

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &\overset{\Delta}{=} \left[XY^1 - \frac{1}{x_2}(X^1 Y^2 + X^2 Y^1)\right]\frac{\partial}{\partial x_1} \\ &\quad + \left[XY^2 + \frac{1}{x_2}(X^1 Y^1 - X^2 Y^2)\right]\frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= \sum_k \left[XY^k + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k X^i Y^j\right]\frac{\partial}{\partial x_k}\end{aligned}$$

其中 $X = \sum_{i=1}^{2} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{j=1}^{2} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in C^{\infty}(H^2;T(H^2))$,易证 ∇ 是 H^2 的线性联络.

1.3 线性联络的存在性及诱导联络

我们先介绍流形 M^n 上的单位分解定理:

定理 1.3.1 设 $\{A_\alpha\}$ 是 n 维 C^{∞} 流形 M^n 上的任意开覆盖,则存在 C^{∞} 函数族 $G = \{g_\beta \mid \beta = 1,2,\cdots\}$,使得

(1) $g_\beta \geqslant 0, \beta = 1,2,\cdots$;

(2) 任 $P \in M^n$,存在 P 点的领域 V_P,使得只有有限个 g_β 在 V_P 上不为零;

(3) 对每一点 $P \in M^n$,有 $\sum_{\beta=1}^{\infty} g_\beta(P) = 1$;

(4) 对每个 $g_\beta \in G$,存在一个 A_α,使得 $\operatorname{supp} g_\beta \subset A_\alpha$,其中 $\operatorname{supp} g_\beta = \overline{\{P \in M \mid g_\beta(P) \neq 0\}}$ 称为函数 g_β 的支集.

满足定理中各性质的函数族 G 称为从属于 $\{A_\alpha\}$ 的单位分解.

1. 线性联络的存在性定理

定理 1.3.2 任何 C^∞ 微分流形 M^n 上一定存在线性联络 ∇.

证明: 设 $\{V_\alpha\}$ 是 M^n 的坐标覆盖,相应地有一族单位分解 $\{g_\alpha\}$,使得

$$\operatorname{supp} g_\alpha \subset V_\alpha, \quad 0 \leqslant g_\alpha \leqslant 1, \quad \sum_\alpha g_\alpha = 1$$

由于每个坐标域 V_α 上存在局部切标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$,在 V_α 上定义平坦线性联络 ∇^α:

$$\nabla_X^\alpha Y = \sum_i (XY^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

其中 $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$,在 M^n 上定义联络 ∇ 为:

$$\nabla_X Y = \sum_\alpha g_\alpha \nabla_X^\alpha Y \tag{1.3.1}$$

我们证明 ∇ 是 M^n 上的线性联络,事实上:

(1) $\nabla_X(fY + gZ) = \sum_\alpha g_\alpha \nabla_X^\alpha (fY + gZ)$

$= \sum_\alpha g_\alpha [(Xf)Y + f \nabla_X^\alpha Y + (Xg)Z + g(\nabla_X^\alpha Z)]$

$= (Xf)\sum_\alpha g_\alpha Y + f\sum_\alpha g_\alpha \nabla_X^\alpha Y + (Xg)\sum_\alpha g_\alpha Z + g\sum_\alpha g_\alpha \nabla_X^\alpha Z$

$= (Xf)Y + f\nabla_X Y + (Xg)Z + g\nabla_X Z$

(2) $\nabla_{fX+gY} Z = \sum_\alpha g_\alpha \nabla_{fX+gY}^\alpha Z$

$= \sum_\alpha g_\alpha (f \nabla^\alpha{}_X Z + g \nabla_Y^\alpha Z) = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

所以 ∇是M^n 上的线性联络.

2. 诱导联络

引理 1.3.1 设 ∇是n 维C^∞ 微分流形 M^n 上的线性联络,V是 M^n 的开子流形,$X,Y\in C^\infty(M;T(M))$,如果 $X|_V=0$ 或 $Y|_V=0$,则 $\nabla_X Y|_V=0$

证明:(i) 设 $Y|_V=0,\forall P\in V,g\in C^\infty(M;R)$. 只须证明 $[(\nabla_X Y)g](P)=0$,现选取 $f\in C^\infty(M;R)$,使得 $f(P)=0$,$f|_{M-V}=1$,则 $fY=Y$,从而

$$(\nabla_X Y)g=(\nabla_X fY)g=(Xf)(Yg)+f(\nabla_X Y)g$$

因为 $Y|_V=0$,所以对任 $P\in V$,有 $Y_P=0$,又 $f(P)=0$,故 $[(\nabla_X Y)g](P)=(X_P f)(Y_P g)+f(P)(\nabla_X Y)_P g=0$,则由 P 的任意性可得证.

(ii) 若 $X|_V=0$,如上选取 f,有 $fX=X$,从而

$$(\nabla_X Y)g=(\nabla_{fX} Y)g=f(\nabla_X Y)g$$

所以$[(\nabla_X Y)g](P)=f(P)(\nabla_X Y)_P g=0$.

(1) 整体联络 ∇诱导局部联络∇^V

设 ∇是M^n 上的线性联络,V是M^n 的坐标域,$P\in V,X,Y\in C^\infty(V;T(V))$,将 X,Y 扩充成M^n 上的向量场$\bar{X}$、$\bar{Y}$.

定义 1.3.1 V 上的线性联络∇^V 定义为

$$(\nabla_X^V Y)_q=(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y})_q,q\in V \tag{1.3.2}$$

设 $\bar{X}$ 和$\bar{X}_1$ 都是 X 扩充成M^n 上的向量场,即$\bar{X}|_V=X,\bar{X}_1|_V=X$,$\bar{Y}$ 和$\bar{Y}_1$ 都是 Y 扩充成M^n 上的向量场,即$\bar{Y}|_V=Y,\bar{Y}_1|_V=Y$, 那么 $(\bar{Y}_1-\bar{Y})|_V=0$, 由引理 1.3.1 可知, 在 V 上, $\nabla_{\bar{X}}(\bar{Y}_1-\bar{Y})=\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}_1-\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}=0$,所以式 $\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}_1=\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}$,同理,$\nabla_{\bar{X}_1}\bar{Y}=\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}$,所以式(1.3.2) 的右边与 $\bar{X},\bar{Y}$ 的选取无关,所以该定义合理,且 ∇^V 是 V 上的线性联络.

(2) 局部联络 ∇^V 确定整体联络∇

设 M^n 由坐标域$\{V,W,\cdots\}$ 覆盖,在每个坐标域上给出一组

函数 Γ_{ij}^k，设在(V,x_i)上给出的函数为Γ_{ij}^k，在(W,y_i)上给出的函数为$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^r$，当 $V \cap W \neq \varnothing$时，$\Gamma_{ij}^k$ 与$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^r$ 适合式(1.2.15)，则由式(1.2.10) 及式(1.2.12) 定义了 V 上的线性联络∇^V，从而我们有

定义 1.3.2 M^n 上的线性联络∇定义为

$$(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y})_P = (\nabla_X^V Y)_P \tag{1.3.3}$$

其中 $\bar{X},\bar{Y} \in C^\infty(M;T(M)),P \in V \subset M,X = \bar{X}|_V,Y = \bar{Y}|_V$，易证由式(1.3.3) 定义的 ∇是M 上的线性联络，且 ∇在每个坐标域 V 上诱导出联络∇^V.

(3) 子流形的诱导联络

设 M 是N 的子流形，微分流形 N 上的线性联络为$\bar{\nabla}$，定义 M 上的线性联络如下：

设 $X,Y \in C^\infty(M;T(M))$，将 X 和 Y 扩充成N 上的向量场 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$，因$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}|_P$ 不一定属于 $T_P(M)$，故

定义 1.3.3 子流形 M 上的线性联络∇定义为

$$(\nabla_X Y)_P = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})_P\text{，在 } T_P(M) \text{ 上的投影} \tag{1.3.4}$$

或记$(\nabla_X Y)_P = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})_P^T$，由引理 1.3.1 知，定义合理，且 ∇是子流形 M 上的线性联络.

例 设 $N = R^{n+1}$ 是平坦欧氏空间，$\bar{\nabla}$ 是 R^{n+1} 上的联络，设

$$M^n = \{x = (x_1,\cdots,x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_{n+1} = f(x_1,\cdots,x_n)\}$$

是 R^{n+1} 中的超曲面，M^n 的切标架场为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), i = 1,\cdots,n \tag{1.3.5}$$

记 $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$，易见 M^n 上的单位法向量场是

$$e_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_i f_i^2}}(f_1,\cdots,f_n,-1) \tag{1.3.6}$$

超曲面 M^n 上的线性联络∇定义为

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, e_{n+1})e_{n+1} \tag{1.3.7}$$

其中 $\tilde{g}$ 是 R^{n+1} 的通常内积，因为 $\tilde{g}(e_{n+1},e_{n+1}) = 1$，所以

$\tilde{g}(\nabla_X Y, e_{n+1}) = 0$,从而 $\nabla_X Y \in C^\infty(M;T(M))$,易证:$\nabla$满足线性联络的条件(1) 和(2). 所以 ∇是M上的线性联络.

定理 1.3.3 设 $X \in C^\infty(M;T(M))$,$P \in M$,若 $X_P = 0$,则对一切 $Y \in C^\infty(M;T(M))$,有

$$(\nabla_X Y)_P = 0 \tag{1.3.8}$$

它等价于:设 $\bar{X}, X \in C^\infty(M;T(M))$,$P \in M$,若 $X_P = \bar{X}_P$,则对一切 $Y \in C^\infty(M;T(M))$,有

$$(\nabla_X Y)_P = (\nabla_{\bar{X}} Y)_P \tag{1.3.9}$$

证明:设(V, φ, x_i)是P点的坐标系,则 $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$,而 $X_P = \sum_i X^i(P) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P = 0 \Leftrightarrow X^i(P) = 0, i = 1,\cdots,n$. 所以 $(\nabla_X Y)_P = \left(\sum_i X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y\right)_P = \sum_i X^i(P)\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y\right)_P = 0$.

注 1 定理1.3.3说明了$(\nabla_X Y)_P$只依赖于X_P.

注 2 设 $Y \in C^\infty(M;T(M))$,$P \in M$,若 $Y_P = 0$,则 $(\nabla_X Y)_P \neq 0$,此式等价于:设 $Y, \widetilde{Y} \in C^\infty(M;T(M))$,$P \in M$,若 $Y_P = \bar{Y}_P$,则$(\nabla_X Y)_P \neq (\nabla_X \bar{Y})_P$.

实际上:设(V, x_i)是P点的坐标系,则 $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$,而 $Y_P = \sum_i Y^i(P) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P = 0 \Leftrightarrow Y^i(P) = 0, i = 1,\cdots,n$.

$$\begin{aligned}(\nabla_X Y)_P &= \left(\nabla_X \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P \\ &= \sum_i XY^i(P) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P + \sum_i Y^i(P)\left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P \\ &= \sum_i X_P(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P \neq 0.\end{aligned}$$

1.4 线性联络的挠率张量场和曲率张量场

1. 诱导张量场及括号积

定理 1.4.1 设 $\theta: C^{\infty}(M;T(M)) \times \cdots \times C^{\infty}(M;T(M)) \to C^{\infty}(M;T(M)): (X_1,\cdots,X_s) \to \theta(X_1,\cdots,X_s)$ 是 $C^{\infty}(M;R)$ 上的 s 重线性映射,则 θ 诱导出 M 上的 $(1,s)$ 型张量场

$$\bar{\theta}: C^{\infty}(M;T^*(M)) \times C^{\infty}(M;T(M)) \times \cdots \times C^{\infty}(M;T(M)) \to C^{\infty}(M;R)$$

$$\bar{\theta}(\omega, X_1,\cdots,X_s) \overset{\Delta}{=} \omega(\theta(X_1,\cdots,X_s)) \qquad (1.4.1)$$

这里 $\omega \in C^{\infty}(M;T^*(M)) = \Lambda^1(M) = \{M$ 上余切向量场,或一次微分形式$\}$,我们也称 θ 为 M 上的 $(1,s)$ 型张量场.

证明:只证 $\bar{\theta}$ 是线性映射便可.

(1)
$$\begin{aligned}
&\bar{\theta}(f_1\omega_1 + f_2\omega_2, X_1,\cdots,X_s) \\
&= (f_1\omega_1 + f_2\omega_2)(\theta(X_1,\cdots,X_s)) \\
&= f_1\omega_1(\theta(X_1,\cdots,X_s)) + f_2\omega_2(\theta(X_1,\cdots,X_s)) \\
&= f_1\bar{\theta}(\omega_1, X_1,\cdots,X_s) + f_2\bar{\theta}(\omega_2, X_1,\cdots,X_s)
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
&\bar{\theta}(\omega, X_1,\cdots,f_1X_i + f_2\bar{X}_i,\cdots,X_s) \\
&= \omega(f_1\theta(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_s) + f_2\theta(X_1,\cdots,\bar{X}_i,\cdots,X_s)) \\
&= f_1\bar{\theta}(\omega, X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_s) + f_2\bar{\theta}(\omega, X_1,\cdots,\bar{X}_i,\cdots,X_s)
\end{aligned}$$

其中 $f_1, f_2 \in C^{\infty}(M;R)$, $X_i, \bar{X}_i \in C^{\infty}(M;T(M))$, $\omega_1,\omega_2 \in \Lambda^1(M)$. 所以 $\bar{\theta}$ 是 M 上的 $(1,s)$ 型张量场.

我们在流形 M 上的全体光滑切向量场构成的集合 $C^{\infty}(M;T(M))$ 中引进一种新的运算 —— 括号积.

定义 1.4.1 设 $X, Y \in C^{\infty}(M;T(M))$,向量场 X 和 Y 的括号积 $[X,Y]$ 仍是一个向量场,它由下面的映射给出:

$$[\ ,\ ]: C^{\infty}(M;T(M)) \times C^{\infty}(M;T(M)) \to C^{\infty}(M;T(M))$$

$$(X,Y) \to [X,Y]; [X,Y]f \overset{\Delta}{=} X(Yf) - Y(Xf) \qquad (1.4.2)$$

或$[X,Y]_P f = X_P(Yf) - Y_P(Xf)$,其中 $P \in M, f, [X,Y]f \in C^\infty(M;R)$.

括号积具有以下性质:

定理 1.4.2 设 $X, Y \in C^\infty(M;T(M))$, 则 $[X,Y] \in C^\infty(M;T(M))$.

注 该定理的证明留作习题,只需验证以下两条:

(i) $[X,Y](\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1[X,Y]f_1 + \lambda_2[X,Y]f_2$

(ii) $[X,Y](f_1 \cdot f_2) = f_1[X,Y]f_2 + f_2[X,Y]f_1$

定理 1.4.3 设 $\lambda_1, \lambda_2 \in R, X_i, Y_i, X, Y \in C^\infty(M;T(M)), i = 1,2$,则括号积有以下性质:

(1) 双线性:$[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1[X_1, Y] + \lambda_2[X_2, Y]$

$[X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2] = \lambda_1[X, Y_1] + \lambda_2[X, Y_2]$

(2) 反称性: $[X,Y] = -[Y,X]$

(3) Jacobi 恒等式成立:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \tag{1.4.3}$$

或$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

证明:只证(2),其余留作练习.

对任意 $f \in C^\infty(M;R)$,因为

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$
$$= -\{Y(Xf) - X(Yf)\} = -[Y,X]f$$

又 f 任意,所以$[X,Y] = -[Y,X]$.

定理1.4.4 设$X, Y \in C^\infty(M, T(M))$,则对任意函数 $f, g \in C^\infty(M;R)$,有

$$[fX, gY] = fg[X,Y] - g(Yf)X + f(Xg)Y \tag{1.4.4}$$

特别地:

$$[fX, Y] = f[X,Y] - (Yf)X$$
$$[X, gY] = g[X,Y] + (Xg)Y$$

证明:任取 $h \in C^\infty(M;R)$,有

$$[fX, gY]h = (fX)((gY)(h)) - (gY)((fX)(h))$$

$$= fX(g \cdot Yh) - gY(f \cdot Xh)$$
$$= f[(Xg)(Yh) + gX(Yh)] - g[(Yf)(Xh) + fY(Xh)]$$
$$= fg[X,Y]h - g(Yf)(Xh) + f(Xg)(Yh)$$
$$= \{fg[X,Y] - g(Yf)X + f(Xg)Y\}h$$

又 h 任意,所以(1.4.4)式成立.

定理 1.4.5 设 (V,φ,x_i) 是 M 的任一坐标系,$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$,则

(1) $\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$

(2) $[X,Y] = \sum_i \left[\sum_j \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_i}$

证明:(1) 任 $f \in C^\infty(M;R)$,因为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]f = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_j}\circ\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}\circ\varphi\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial r_i}\left[\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_j}\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\right]\circ\varphi - \frac{\partial}{\partial r_j}\left[\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\right]\circ\varphi$$
$$= \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i\partial r_j}\circ\varphi - \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_j\partial r_i}\circ\varphi = 0$$

又 f 任意,所以$\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$.

(2) 由定理 1.4.3 及定理 1.4.4 及$\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$. 我们有

$$[X,Y] = \left[\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{i,j}\left[X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$$
$$= \sum_{i,j}\left\{X^iY^j\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] - Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + X^i \frac{\partial}{\partial x_i}Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right\}$$
$$= \sum_i \left[\sum_j \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

2. 线性联络 ∇ 的挠率张量场 T

定义 1.4.2 映射 $T: C^\infty(M;T(M)) \times C^\infty(M;T(M)) \to C^\infty(M;T(M))$ 定义为

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \qquad (1.4.5)$$

显然 T 是 M 上的(1,2)型张量场，T 称为线性联络 ∇ 的挠率张量场.

定理 1.4.6 挠率张量场 T 有如下性质

(1) 反称性：$T(X,Y) = -T(Y,X)$

(2) 双线性：

$$T(f_1X_1 + f_2X_2, Y) = f_1T(X_1,Y) + f_2T(X_2,Y)$$

$$T(X, f_1Y_1 + f_2Y_2) = f_1T(X,Y_1) + f_2T(X,Y_2)$$

其中 $f_1, f_2 \in C^\infty(M;R)$；$X, X_i, Y, Y_i \in C^\infty(M;T(M))$，$i = 1,2$.

证明：(1)

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ &= -(\nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y,X]) = -T(Y,X). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &T(f_1X_1 + f_2X_2, Y) \\ =\ &\nabla_{f_1X_1+f_2X_2} Y - \nabla_Y(f_1X_1 + f_2X_2) - [f_1X_1 + f_2X_2, Y] \\ =\ &f_1\nabla_{X_1} Y + f_2\nabla_{X_2} Y - (Yf_1)X_1 - f_1\nabla_Y X_1 - (Yf_2)X_2 \\ &- f_2\nabla_Y X_2 - f_1[X_1,Y] + (Yf_1)X_1 - f_2[X_2,Y] + (Yf_2)X_2 \\ =\ &f_1T[X_1,Y] + f_2T(X_2,Y) \end{aligned}$$

同理可得

$$T(X, f_1Y_1 + f_2Y_2) = f_1T(X,Y_1) + f_2T(X,Y_2).$$

定理 1.4.7 设 V 是 P 点的坐标域，$X_1, \cdots, X_n$ 是 V 上的一般基向量场，设 $\nabla_{X_i}X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$，$T(X_i,X_j) = \sum_k T_{ij}^k X_k$，$[X_i,X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k$，其中 $\Gamma_{ij}^k, T_{ij}^k, C_{ij}^k \in C^\infty(V;R)$，则

(1) $$T_{ij}^k = -T_{ji}^k, \text{从而 } T_{ii}^k = 0 \tag{1.4.6}$$

(2) $$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - C_{ij}^k \tag{1.4.7}$$

证明:(1) 因为

$$\sum_k T_{ij}^k X_k = T(X_i, X_j) = -T(X_j, X_i) = -\sum_k T_{ji}^k X_k$$

所以 $T_{ij}^k = -T_{ji}^k$.

(2) 因为

$$\sum_k T_{ij}^k X_k = T(X_i, X_j) = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j]$$

$$= \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - C_{ij}^k) X_k$$

所以 $$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - C_{ij}^k.$$

注 当 $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 时,式(1.4.7)为

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \tag{1.4.8}$$

设 $X = \sum_i X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_j Y^j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$,由定理 1.4.6 得

$$T(X, Y) = \sum_{i,j,k} T_{ij}^k X^i X^j \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.4.9}$$

定理 1.4.8 设(V, φ, x_i)和(W, ψ, y_i)是P点的两个坐标系,$T\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k T_{ij}^k \dfrac{\partial}{\partial x_k}, T\left(\dfrac{\partial}{\partial y_\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial y_\beta}\right) = \sum_r \overline{T}_{\alpha\beta}^r \dfrac{\partial}{\partial y_r}$,则有

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta}^r = \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} T_{ij}^k \tag{1.4.10}$$

所以 $T = \sum_{i,j,k} T_{ij}^k \dfrac{\partial}{\partial x_k} \otimes \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j$ 是(1,2) 型张量场.

证明:因为 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \dfrac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \dfrac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}} \dfrac{\partial}{\partial y_\beta} = \sum_r \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^r \dfrac{\partial}{\partial y_r}$,由式(1.4.8) 及式(1.2.15) 得

$$\overline{T}_{\alpha\beta}^r = \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^r - \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}^r$$

$$= \sum_j \frac{\partial y_r}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \cdot \Gamma_{ij}^k$$

$$- \sum_{j} \frac{\partial y_r}{\partial x_j} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} - \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial x_j}{\partial y_\alpha} \cdot \Gamma_{ij}^k$$

$$= \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} T_{ij}^k$$

定义 1.4.3 若微分流形 M^n 上的线性联络 ∇ 的挠率张量场 T 为零,则称 ∇ 为 M^n 上的无挠线性联络.

显然

$$T = 0 \Leftrightarrow T_{ij}^k = 0, i,j,k = 1,2,\cdots,n \qquad (1.4.11)$$

定理 1.4.9 无挠线性联络 $\overline{\nabla}$ 总是存在的.

证明:设线性联络 ∇ 的联络系数为 Γ_{ij}^k,令

$$f_{ij}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k)$$

则 $f_{ij}^k = f_{ji}^k$,设 (V,φ,x_i) 和 (W,ψ,y_i) 是 P 点的两个坐标系,由式(1.2.15)得

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^r = \sum_j \frac{\partial y_r}{\partial x_j} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \Gamma_{ij}^k$$

故

$$\tilde{f}_{\alpha\beta}^r = \frac{1}{2}(\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^r + \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}^r)$$

$$= \sum_j \frac{\partial y_r}{\partial x_j} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} f_{ij}^k$$

所以 f_{ij}^k 是某个线性联络 $\overline{\nabla}$ 的联络系数,由 $f_{ij}^k = f_{ji}^k$ 知,$\overline{\nabla}$ 是无挠线性联络.

定理 1.4.10 任意一个线性联络 ∇ 总可以分解成它的挠率张量场 T 的倍数与一个无挠线性联络的和.

证明:设 Γ_{ij}^k 是线性联络 ∇ 的联络系数,由定理 1.4.9 知,$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k)$ 是无挠线性联络 $\overline{\nabla}$ 的联络系数,由式(1.4.8)得

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k) = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k - T_{ij}^k)$$

$$= \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{2} T_{ij}^k$$

即 $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}T_{ij}^k + \overline{\Gamma}_{ij}^k$,从而 $\nabla_{X_i}X_j = \frac{1}{2}T(X_i, X_j) + \overline{\nabla}_{X_i}X_j$,

$\nabla_X Y = \frac{1}{2}T(X, Y) + \overline{\nabla}_X Y$.

3. 线性联络 ∇ 的曲率张量场

定义 1.4.4 算子 $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ 称为线性联络 ∇ 的曲率算子,$R(X,Y)$ 由下式定义:

$$R(X,Y): C^\infty(M;T(M)) \to C^\infty(M;T(M)),$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{1.4.12}$$

而 $R: C^\infty(M;T(M)) \times C^\infty(M;T(M)) \times C^\infty(M;T(M)) \to C^\infty(M;T(M))$ 定义为 $R(X,Y,Z) \overset{\Delta}{=} R(X,Y)Z$,$R$ 叫线性联络的曲率张量场.

定理 1.4.11 曲率算子 $R(X,Y)$ 和曲率张量场 R 有如下性质:

(1) 反称性:$R(X,Y) = -R(Y,X)$,从而 $R(X,X) = 0$.

(2) 三重线性性质:

$$R(f_1X_1 + f_2X_2, Y)Z = f_1R(X_1,Y)Z + f_2R(X_2,Y)Z$$

$$R(X, f_1Y_1 + f_2Y_2)Z = f_1R(X,Y_1)Z + f_2R(X,Y_2)Z$$

$$R(X,Y)(f_1Z + f_2Z) = f_1R(X,Y)Z_1 + f_2R(X,Y)Z_2$$

其中 $f_1, f_2 \in C^\infty(M;R)$,$X, X_i, Y, Y_i, Z, Z_i \in C^\infty(M;T(M))$.

证明:只证(2)中的第一式,因

$$\begin{aligned}
R(X_1 + X_2, Y)Z &= \nabla_{X_1+X_2}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{X_1+X_2}Z - \nabla_{[X_1+X_2,Y]}Z \\
&= \nabla_{X_1}\nabla_Y Z + \nabla_{X_2}\nabla_Y Z - \nabla_Y(\nabla_{X_1}Z_1 + \nabla_{X_2}Z) \\
&\quad - \nabla_{[X_1,Y]}Z - \nabla_{[X_2,Y]}Z \\
&= \nabla_{X_1}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{X_1}Z - \nabla_{[X_1,Y]}Z + \nabla_{X_2}\nabla_Y Z \\
&\quad - \nabla_Y\nabla_{X_2}Z - \nabla_{[X_2,Y]}Z \\
&= R(X_1,Y)Z + R(X_2,Y)Z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z \\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y (f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X} Z \\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z + (Yf)\nabla_X Z \\
&= fR(X,Y)Z
\end{aligned}
$$

所以 R 关于第一个变元是线性的,同理关于第二、第三个变元是线性的.

定理 1.4.12 设 V 是 M^n 上 P 点的坐标系,$X_1,\cdots,X_n$ 是 V 上的一般基向量场,$\nabla_{X_i}X_j = \sum\limits_k \Gamma_{ij}^k X_k$,$[X_i,X_j] = \sum\limits_k C_{ij}^k X_k$,$R(X_j,X_k)X_i = \sum\limits_l R_{ijk}^l X_l$,则有

$$(1)\ R_{ijk}^l = -R_{ikj}^l,\text{从而 } R_{ijj}^l = 0 \tag{1.4.13}$$

$$(2)\ R_{ijk}^l = \sum_s (\Gamma_{js}^l \Gamma_{ki}^s - \Gamma_{ks}^l \Gamma_{ji}^s) + X_j(\Gamma_{ki}^l) - X_k(\Gamma_{ji}^l) - \sum_s C_{jk}^s \Gamma_{si}^l \tag{1.4.14}$$

其中 $\Gamma_{ij}^k, C_{ij}^k, R_{ijk}^l \in C^\infty(V;R)$.

证明:(1) 由定理 1.4.11 的(1) 得

$$\sum_l R_{ijk}^l X_l = R(X_j,X_k)X_i = -R(X_k,X_j)X_i = -\sum_l R_{ikj}^l X_l$$

所以有 $R_{ijk}^l = -R_{ikj}^l$;

(2) $\sum\limits_l R_{ijk}^l X_l = R(X_j,X_k)X_i$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_{X_j}(\nabla_{X_k}X_i) - \nabla_{X_k}(\nabla_{X_j}X_i) - \nabla_{[X_j,X_k]}X_i \\
&= \nabla_{X_j}\Big(\sum_s \Gamma_{ki}^s X_s\Big) - \nabla_{X_k}\Big(\sum_s \Gamma_{ji}^s X_s\Big) - \nabla_{\sum_s C_{jk}^s X_s} X_i \\
&= \sum_l \Big[\sum_s (\Gamma_{js}^l \Gamma_{ki}^s - \Gamma_{ks}^l \Gamma_{ji}^s) + X_j(\Gamma_{ki}^l) - X_k(\Gamma_{ji}^l) - C_{jk}^s \Gamma_{si}^l\Big] X_l
\end{aligned}
$$

比较两边得式(1.4.14) 成立.

当 $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 时,(1.4.14) 式为

$$R_{ijk}^l = \sum_s (\Gamma_{js}^l \Gamma_{ki}^s - \Gamma_{ks}^l \Gamma_{ji}^s) + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ki}^l - \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{ji}^l \tag{1.4.15}$$

设 $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}, Z = \sum_k Z^k \frac{\partial}{\partial x_k}$,
由定理 1.4.11 得

$$R(Y,Z)X = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}^{\ l} X^i Y^j Z^k \frac{\partial}{\partial x_l} \tag{1.4.16}$$

定理 1.4.13 设 (V,φ,x_i) 和 (W,ψ,y_i) 是 M^n 上 P 点的两个坐标系，$R\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_l R_{ijk}^{\ l} \frac{\partial}{\partial x_l}$, $R\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta},\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_\delta \bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \delta} \frac{\partial}{\partial y_\delta}$, 则 $R_{ijk}^{\ l}$ 与 $\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \delta}$ 之间的变换式为

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \delta} = \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial y_\delta}{\partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \frac{\partial x_k}{\partial y_\gamma} R_{ijk}^{\ l} \tag{1.4.17}$$

所以 R 是(1,3) 型张量场，并且

$$R = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^{\ l} \frac{\partial}{\partial x_l} \otimes \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j \otimes \mathrm{d}x_k \tag{1.4.18}$$

1.5 外积、外微分及线性联络的结构方程

本节要用到流形 M^n 上的一次微分形式的外积及外微分的概念，为此我们先介绍：

1. 一次微分形式的外积

设 M^n 是 n 维 C^∞ 微分流形，$\omega_1,\omega_2 \in \Lambda^1(M) = C^\infty(M;T^*(M))$，$\omega_1$ 与 ω_2 的外积 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 由下映射 Λ 给出：

$\Lambda:\Lambda^1(M) \times \Lambda^1(M) \to \Lambda^2(M)$

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1,X_2) \triangleq \omega_1(X_1)\omega_2(X_2) - \omega_1(X_2)\omega_2(X_1) \tag{1.5.1}$$

其中 $X_1,X_2 \in C^\infty(M;T(M))$，显然有 $(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1,X_2) = -(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_2,X_1)$，所以 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 是 M 上的二阶反称协变张量场，即 $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Lambda^2(M)$. 式(1.5.1) 是函数的等式. 由

式(1.5.1)得

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1, \omega_1 \wedge \omega_1 = 0 \qquad (1.5.2)$$

注 一般情形下,若 $\omega \in \Lambda^r(M), \theta \in \Lambda^s(M)$,那么 $\omega \wedge \theta$ 由下面的映射给出:

$$\Lambda : \Lambda^r(M) \times \Lambda^s(M) \to \Lambda^{r+s}(M)$$

$$(\omega \wedge \theta)(X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots, X_{r+s})$$

$$\triangleq \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \varphi(r+s)} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}) \cdot \theta(X_{\sigma(r+1)}, \cdots, X_{\sigma(r+s)})$$

$$(1.5.3)$$

其中置换 $\sigma \in \varphi(r+s) = \{r+s$ 个字母的全体置换$\}$,$\mathrm{sgn}\sigma$ 是σ的符号函数,当 σ 是偶置换时,$\mathrm{sgn}\sigma = (-1)^\sigma = 1$;当 σ 是奇置换时,$\mathrm{sgn}\sigma = (-1)^\sigma = -1$.

特别 $r = 1, s = 2$ 时,$\omega \in \Lambda^1(M), \theta \in \Lambda^2(M)$,式(1.5.3)为

$$\begin{aligned}
&(\omega \wedge \theta)(X_1, X_2, X_3) \\
&= \frac{1}{2}[\omega(X_1)\theta(X_2,X_3) - \omega(X_1)\theta(X_3,X_2) + \omega(X_2)\theta(X_3,X_1) \\
&\quad - \omega(X_2)\theta(X_1,X_3) + \omega(X_3)\theta(X_1,X_2) - \omega(X_3)\theta(X_2,X_1)] \\
&= \omega(X_1)\theta(X_2,X_3) + \omega(X_2)\theta(X_3,X_1) + \omega(X_3)\theta(X_1,X_2)
\end{aligned}$$

易证:外积满足左右分配律,并且有

定理 1.5.1 设 $\omega \in \Lambda^r(M), \theta \in \Lambda^s(M)$,则

$$\omega \Lambda \theta = (-1)^{rs} \theta \Lambda \omega \qquad (1.5.4)$$

由此可得式(1.5.2)成立,并对余切标架场 $\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n \in \Lambda^1(M)$,有

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$$

设 $\omega_1, \cdots, \omega_n \in \Lambda^1(M^n)$,那么有

$$\begin{aligned}
&\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge \omega_i \\
&= (-1)^{i-1} \omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \\
&> \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\
&= (-1)^{i-1} \omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n
\end{aligned}$$

式中 $\hat{\omega}_i$ 表示无 ω_i 这一项.

定理1.5.2 设 $\omega \in \Lambda^2(M^n)$,即 ω 是 M^n 上的二阶反称协变张量场,$(V,\varphi,x_1,\cdots,x_n)$ 是 M^n 的局部坐标系,则

$$\omega = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \omega_{ij} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_{ij}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \quad (1.5.5)$$

其中 $\omega_{ij} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\omega_{ji} \in C^\infty(V;R)$,$\omega_{ii} = 0$. 特别地,当 $\omega \in \Lambda^2(M^3)$,有

$$\omega = \omega_{12}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \omega_{13}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \omega_{23}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \quad (1.5.6)$$

注 一般情况,设 $\omega \in \Lambda^k(M^n)$,在局部 (V,φ,x_i) 上,ω 的表达式为

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \omega_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k}\omega_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \quad (1.5.7)\end{aligned}$$

2. 一次微分形式的外微分

设 $\omega \in \Lambda^1(M) = C^\infty(M;T^*(M))$ 是微分流形 M^n 上的一次微分形式,它也是(0,1)型协变张量场,局部 (V,φ,x_i) 上,ω 的表达式为:

$$\omega = \omega_1\mathrm{d}x_1 + \cdots + \omega_n\mathrm{d}x_n = \sum_i \omega_i\mathrm{d}x_i \quad (1.5.8)$$

其中 $\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \in C^\infty(V;R)$,我们作如下定义

定义1.5.1 外微分算子 d 是映射 $\mathrm{d}:\Lambda^1(M^n) \to \Lambda^2(M^n)$,$\omega = \sum_i \omega_i \mathrm{d}x_i$ 的外微分 $\mathrm{d}\omega$ 定义为

$$\mathrm{d}\omega = \sum_i \mathrm{d}\omega_i \wedge \mathrm{d}x_i = \sum_i\sum_j \frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \quad (1.5.9)$$

注 一般情形,外微分算子 $\mathrm{d}:\Lambda^k(M^n) \to \Lambda^{k+1}(M^n)$,$k = 0, 1,\cdots,n$. 式(1.5.7)中的 ω 的外微分 $\mathrm{d}\omega$ 为

$$d\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{1.5.10}$$

特别地，$k = 2$ 时，式(1.5.5) 的外微分 $d\omega$ 为

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} d\omega_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

定理 1.5.3 设 $\omega \in \Lambda^n(M^n)$，则 $d\omega = 0$.

证明：设 $\omega \in \Lambda^n(M^n)$，局部$(V,\varphi,x_i)$上，$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$，因 $dx_i \wedge dx_i = 0$，所以

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0. \end{aligned}$$

由此定义易得：

定理 1.5.4 d是线性算子：设 $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(M)$；$\lambda_1, \lambda_2 \in R$，则

$$d(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2 \tag{1.5.12}$$

由于外积满足左右分配律，易证下面定理成立.

定理 1.5.5 设 $\omega \in \Lambda^k(M)$，$\theta \in \Lambda^l(M)$，则

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta \tag{1.5.13}$$

特别地，$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k \in \Lambda^1(M)$ 时，

(1) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge d\omega_2$

(2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) = d\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge d\omega_2 \wedge \omega_3 + \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge d\omega_3$

(3) $d(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge d\omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_k$

定理 1.5.6 设 $\omega \in \Lambda^k(M^n)$，则 $d(d\omega) = 0$.

证明：只对 $k = 1$ 证明，$\omega \in \Lambda^1(M)$，局部(V,φ,x_i)上

$$\omega = \sum_i \omega_i dx_i, d\omega = \sum_i \sum_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_k} \mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_i \sum_{j<k} \left(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k \partial x_j} \right) \mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

上式用到了 $\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_j = 0$,$\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k$,$\dfrac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k \partial x_j}$.

例1 设 $\omega_0 \in \Lambda^0(R^2)$,$\omega_1 \in \Lambda^1(R^2)$,$\omega_2 \in \Lambda^2(R^2)$,因 R^2 只有一个坐标系,坐标函数为 x 和 y,那么

$$
\omega_0 = f, \omega_1 = f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y, \omega_2 = g \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
$$

其中 $f, f_1, f_2, g \in C^\infty(R^2; R)$,求 $\mathrm{d}\omega_0$,$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_0)$,$\mathrm{d}\omega_1$,$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_1)$,$\mathrm{d}\omega_2$.

解(1) $\mathrm{d}\omega_0 = \mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \in \Lambda^1(R^2)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_0) &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}y \right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y \right) \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0
\end{aligned}
$$

与定理1.5.6吻合.

(2)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_1 &= \mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}f_2 \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\mathrm{d}y \right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\mathrm{d}y \right) \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Lambda^2(R^2)
\end{aligned}
$$

由定理1.5.6得 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_1) = 0$.

(3)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_2 &= \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y \right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0
\end{aligned}
$$

与定理1.5.3吻合.

3. 外微分 d 与括号运算[,]的关系

定理 1.5.7 设 $\omega \in \Lambda^1(M), X_1, X_2 \in C^\infty(M;T(M))$,则

$$d\omega(X_1,X_2) = X_1\omega(X_2) - X_2\omega(X_1) - \omega([X_1,X_2]) \tag{1.5.14}$$

证明:因为 d 和 X_i 是线性的,只需对 $\omega = f dg$ 来证便可,其中 $f, g \in C^\infty(M;R)$,因 $d(dg) = 0$,所以

$$\begin{aligned}
\text{左面} &= d\omega(X_1,X_2) \\
&= (df \wedge dg + f \wedge d(dg))(X_1,X_2) \\
&= (df \wedge dg)(X_1,X_2) \\
&= df(X_1)\cdot dg(X_2) - df(X_2)\cdot dg(X_1) \\
&= (X_1 f)(X_2 g) - (X_2 f)(X_1 g).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右面} &= X_1\omega(X_2) - X_2\omega(X_1) - \omega([X_1,X_2]) \\
&= X_1(f dg(X_2)) - X_2(f dg(X_1)) - f dg([X_1,X_2]) \\
&= X_1(f\cdot X_2 g) - X_2(f\cdot X_1 g) - f[X_1,X_2]g \\
&= (X_1 f)(X_2 g) + fX_1(X_2 g) - (X_2 f)(X_1 g) \\
&\quad - fX_2(X_1 g) - f(X_1(X_2 g) - X_2(X_1 g)) \\
&= (X_1 f)(X_2 g) - (X_2 f)(X_1 g)
\end{aligned}$$

因左面 = 右面,所以式(1.5.14)成立.

注 定理 1.5.7 的一般情形为:设 $\omega \in \Lambda^k(M), X_1, \cdots, X_{k+1} \in C^\infty(M;T(M))$,则

$$\begin{aligned}
& d\omega(X_1,\cdots,X_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1}) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1})
\end{aligned}$$

特别 $k = 1$ 就是式(1.5.14);$k = 2$ 时,$\omega \in \Lambda^2(M^n)$,有

$$\begin{aligned}
& d\omega(X_1,X_2,X_3) \\
&= X_1\omega(X_2,X_3) - X_2\omega(X_1,X_3) + X_3\omega(X_1,X_2)
\end{aligned}$$

$$-\omega([X_1,X_2],X_3)+\omega([X_1,X_3],X_2)-\omega([X_2,X_3],X_1) \tag{1.5.15}$$

4. 线性联络的结构方程

设 V 是 n 维 C^∞ 微分流形 M^n 上 P 点的坐标域，$X_1,\cdots,X_n$ 是 V 上的一般基向量场，$\omega^1,\cdots,\omega^n$ 是其对偶，即 $\omega^i(X_j)=\delta^i_j$，$\omega^i\in\Lambda^1(M)$，$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ 是坐标基向量场，$\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 是其对偶，设

$$\nabla_{X_i}X_j=\sum_k\Gamma^k_{ij}X_k,\quad \omega^i_j=\sum_k\Gamma^i_{kj}\omega^k \tag{1.5.16}$$

从而

$$\Gamma^k_{ij}=\omega^k(\nabla_{X_i}X_j)=\omega^k_j(X_i) \tag{1.5.17}$$

即 ω^i_j 与 Γ^i_{kj} 相互确定，又 Γ^i_{kj} 和线性联络 ∇ 相互确定，我们称一次微分形式 ω^i_j 为线性联络的联络形式，由式(1.5.16) 和式(1.5.17) 及 $X\beta^k=\mathrm{d}\beta^k(X)$ 和 ω^i_j 的线性性质，式(1.2.11) 为

$$\nabla_XY=\sum_k\left[\mathrm{d}\beta^k(X)+\sum_j\omega^k_j(X)\beta^j\right]X_k \tag{1.5.18}$$

定理 1.5.8 线性联络 ∇ 在一般基 $\{\omega^i\}$ 向量场下的第一、第二结构方程是

(1) $$\mathrm{d}\omega^i=-\sum_j\omega^i_j\wedge\omega^j+\frac{1}{2}\sum_{j,k}T^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k \tag{1.5.19}$$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^j_i&=\sum_k\omega^k_i\wedge\omega^j_k+\frac{1}{2}\sum_{k,l}R^j_{ikl}\omega^k\wedge\omega^l\\&\triangleq\sum_k\omega^k_i\wedge\omega^j_k+\Omega^j_i\end{aligned} \tag{1.5.20}$$

其中 $\Omega^j_i=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R^j_{ikl}\omega^k\wedge\omega^l=\sum_{k<l}R^j_{ikl}\omega^k\wedge\omega^l$ 称为线性联络 ∇ 的曲率形式.

证明：(1) 只须证明两边在基 (X_m,X_s) 上的作用相等便可. 由式(1.5.1) 和外积的线性性质及式(1.5.14)、式(1.4.6)、式(1.4.7) 和式(1.5.17) 可得：

$$\left(-\sum_j \omega_j^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k\right)(X_m, X_s)$$
$$= -\sum_j [\omega_j^i(X_m)\omega^j(X_s) - \omega_j^i(X_s)\omega^j(X_m)]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{j,k} T^i_{jk}[\omega^j(X_m)\omega^k(X_s) - \omega^j(X_s)\omega^k(X_m)]$$
$$= -\Gamma^i_{ms} + \Gamma^i_{sm} + T^i_{ms}$$
$$= -\Gamma^i_{ms} + \Gamma^i_{sm} + \Gamma^i_{ms} - \Gamma^i_{sm} - C^i_{ms}$$
$$= -C^i_{ms}$$
$$= X_m\omega^i(X_s) - X_s\omega^i(X_m) - \omega^i([X_m, X_s])$$
$$= \mathrm{d}\omega^i(X_m, X_s)$$

所以 $\mathrm{d}\omega^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$.

(2) 由外积的定义式(1.5.1)及式(1.4.13)和式(1.4.14)得

$$\left[\sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l\right](X_m, X_s)$$
$$= \sum_k [\omega_i^k(X_m)\omega_k^j(X_s) - \omega_i^k(X_s)\omega_k^j(X_m)]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^j_{ikl}[\omega^k(X_m)\omega^l(X_s) - \omega^k(X_s)\omega^l(X_m)]$$
$$= \sum_k (\Gamma^k_{mi}\Gamma^j_{sk} - \Gamma^k_{si}\Gamma^j_{mk}) + R^j_{ims}$$
$$= X_m(\Gamma^j_{si}) - X_s(\Gamma^j_{mi}) - \sum_t C^t_{ms}\Gamma^j_{ti}$$

又因为

$$\mathrm{d}\omega_i^j(X_m, X_s) = X_m\omega_i^j(X_s) - X_s\omega_i^j(X_m) - \omega_i^j([X_m, X_s])$$
$$= X_m(\Gamma^j_{si}) - X_s(\Gamma^j_{mi}) - \sum_t C^t_{ms}\Gamma^j_{ti}$$

所以 $\mathrm{d}\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l$.

注　第二结构方程式(1.5.20)可写成以下等价形式

$$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j \tag{1.5.21}$$

记 $\omega = (\omega_i^j)$, $\mathrm{d}\omega = (\mathrm{d}\omega_i^j)$, $\Omega = (\Omega_i^j)$. 那么上式可写为矩阵形

式：$\Omega = \mathrm{d}\omega - \omega \wedge \omega$，$\Omega$ 称为曲率矩阵，ω 叫联络矩阵.

定理 1.5.9 设 ∇ 是无挠线性联络，则坐标形式的第一 Bianchi 恒等式成立：

$$R^{\ i}_{jkl} + R^{\ i}_{klj} + R^{\ i}_{ljk} = 0 \tag{1.5.22}$$

证明：因 ∇ 无挠，所以 $T^k_{ij} = 0$，从而第一结构方程为

$$\mathrm{d}\omega^i = -\sum_j \omega^i_j \wedge \omega^j$$

对上式外微分并由第二结构方程得

$$\begin{aligned}
0 = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega^i) &= -\sum_j \mathrm{d}\omega^i_j \wedge \omega^j + \sum_j \omega^i_j \wedge \mathrm{d}\omega^j \\
&= -\sum_j \Big[\sum_k \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^{\ i}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l\Big] \wedge \omega^j \\
&\quad + \sum_j \omega^i_j \wedge \Big(-\sum_k \omega^j_k \wedge \omega^k\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j,k,l} R^{\ i}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^j \\
&= -\sum_{j<k<l} (R^{\ i}_{jkl} + R^{\ i}_{klj} + R^{\ i}_{ljk})\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l
\end{aligned}$$

所以 $R^{\ i}_{jkl} + R^{\ i}_{klj} + R^{\ i}_{ljk} = 0$.

另证：由式(1.4.15) 及 $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ 得

$$\begin{aligned}
&R^{\ i}_{jkl} + R^{\ i}_{klj} + R^{\ i}_{ljk} \\
&= \sum_s (\Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{lj} - \Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{kj}) + \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^i_{lj} - \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^i_{kj} \\
&\quad + \sum_s (\Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{jk} - \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{lk}) + \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^i_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^i_{lk} \\
&\quad + \sum_s (\Gamma^i_{js}\Gamma^s_{kl} - \Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{jl}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^i_{jl} \\
&= 0
\end{aligned}$$

设(V, φ, x_i)是M^n 上 P 点的坐标系，$\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ 是坐标基切向量场，对偶为 $\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n$，设

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \omega_i^j = \sum_k \Gamma_{ki}^j \mathrm{d}x_k$$

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_l R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

则线性联络 ∇ 在坐标基 $\{\mathrm{d}x_i\}$ 下的第一、二结构方程是

$$0 = -\sum_j \omega_j^i \wedge \mathrm{d}x_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} T_{jk}^i \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k \quad (1.5.23)$$

$$\mathrm{d}\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ikl}^j \mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_l \quad (1.5.24)$$

1.6 张量场 T 沿切向量场 X 的协变微商 $\nabla_X T$

1. (1,0) 型张量场 Y(切向量场) 的协变微商 $\nabla_X Y$

设 ∇ 是微分流形 M^n 上的线性联络，即对每一个光滑切向量场 X，对应一个映射 $\nabla_X: C^\infty(M;T(M)) \to C^\infty(M;T(M))$，满足

(1) $\nabla_X(fY + gZ) = f\nabla_X Y + (Xf)Y + g\nabla_X Z + (Xg)Z$

(2) $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

其中 f、$g \in C^\infty(M;R)$，X、Y、$Z \in C^\infty(M;T(M))$，切向量场 $\nabla_X Y$ 称为 Y 沿切向量场 X 的协变(共变)微商.

设 (V,φ,x_i) 是 M^n 的局部坐标系，$X_1,\cdots,X_n$ 是 V 上的一般切标架场，对偶为 $\omega^1,\cdots,\omega^n$，即 $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$；$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ 是坐标切标架场，对偶为 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$，即 $\mathrm{d}x_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$.

设 $X, Y \in C^\infty(V;T(V))$，那么

$$X = \sum_i \alpha^i X_i, \quad Y = \sum_j \beta^j X_j$$

其中 $\alpha^i = \omega^i(X), \beta^j = \omega^j(Y) \in C^\infty(V;R)$，设 $\nabla_{X_i} X_j =$

$\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$，则

$$\nabla_{X_i} Y = \sum_k \left[X_i(\beta^k) + \sum_j \beta^j \Gamma_{ij}^k \right] X_k \triangleq \sum_k \beta^k_{;i} X_k \tag{1.6.1}$$

其中 $\beta^k_{;i} = X_i(\beta^k) + \sum_j \beta^j \Gamma_{ij}^k$ 叫 Y 的分量函数β^k 沿切方向 X_i 的协变导数，由协变微商的定义得

$$\nabla_X Y = \sum_{i,k} \alpha^i \beta^k_{;i} X_k \tag{1.6.2}$$

对于坐标切向量场$\frac{\partial}{\partial x_i}$，设 $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y = \sum_k Y^k \frac{\partial}{\partial x_k}$，其中 $X^i = \mathrm{d}x_i(X) = X(x_i)$，$Y^k = \mathrm{d}x_k(Y) = Y(x_k) \in C^\infty(V;R)$，$Y^k$ 沿切方向$\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的协变导数 $Y^k_{;i}$ 为

$$Y^k_{;i} = \frac{\partial}{\partial x_i} Y^k + \sum_j Y^j \Gamma_{ij}^k \tag{1.6.3}$$

所以

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y = \sum_k Y^k_{;i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \nabla_X Y = \sum_{i,k} X^i Y^k_{;i} \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.6.4}$$

注　设 $f \in C^\infty(M;R)$，则 f 沿切方向 X_i 的协变导数$f_{;i}$ 就是 f 沿 X_i 的协变微商

$$\nabla_{X_i} f = X_i f \triangleq f_{;i} \tag{1.6.5}$$

2. (0,1) 型张量场 θ 沿切向量场 X 的协变微商 $\nabla_X \theta$

定义 1.6.1　设 $\theta \in C^\infty(M;T^*(M))$，$\theta$ 沿切向量场X 的协变微商是映射

$$\nabla_X : C^\infty(M;T^*(M)) \to C^\infty(M;T^*(M))$$

$$(\nabla_X \theta)(Y) \overset{\Delta}{=} \nabla_X \theta(Y) - \theta(\nabla_X Y) \tag{1.6.6}$$

其中 $X, Y \in C^\infty(M;T(M))$，$(\nabla_X \theta)(Y) \in C^\infty(M;R)$.

由式(1.6.6) 容易证明，$\nabla_X \theta$ 是线性映射，即

(1) $(\nabla_X \theta)(fY) = f(\nabla_X \theta)(Y)$

(2) $(\nabla_X \theta)(Y_1 + Y_2) = (\nabla_X \theta)(Y_1) + (\nabla_X \theta)(Y_2)$

所以 $\nabla_X\theta \in C^\infty(M;T^*(M))$.

局部(V,φ,x_i)上，设 $X = \sum_i \alpha^i X_i$，$\theta = \sum_k \theta_k\omega^k$，其中 $\theta_k = \theta(X_k)\in C^\infty(V;R)$. 由式(1.6.6)得

$$(\nabla_{X_i}\theta)(X_k) = \nabla_{X_i}\theta(X_k) - \theta(\nabla_{X_i}X_k) = X_i(\theta_k) - \sum_j \theta_j\Gamma^j_{ik}$$

于是得 $\nabla_{X_i}\theta$ 的局部表达式为

$$\nabla_{X_i}\theta = \sum_k\Big[X_i(\theta_k) - \sum_j\theta_j\Gamma^j_{ik}\Big]\omega^k \triangleq \sum_k\theta_{k;i}\omega^k \qquad (1.6.7)$$

其中 $\theta_{k;i} = X_i(\theta_k) - \sum_j\theta_j\Gamma^j_{ik}$ 称为θ的分量函数θ_k沿切方向X_i的协变导数，从而

$$\nabla_X\theta = \sum_{i,k}\alpha^i\beta_{k;i}\omega^k \qquad (1.6.8)$$

再由式(1.6.6)得

$$(\nabla_{X_i}\omega^j)(X_k) = \nabla_{X_i}\omega^j(X_k) - \omega^j(\nabla_{X_i}X_k) = -\Gamma^j_{ik}$$

于是有

$$\nabla_{X_i}\omega^j = -\sum_k\Gamma^j_{ik}\omega^k \qquad (1.6.9)$$

当 $X = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$，$\omega^j = \mathrm{d}x_j$ 时，$X = \sum_i X^i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，$\theta = \sum_k\theta_k\mathrm{d}x_k$，其中 $\theta_k = \theta\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k}\right)\in C^\infty(V;R)$，则余切向量场$\theta$的分量函数$\theta_k$沿坐标切方向$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$的协变导数为

$$\theta_{k;i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\theta_k - \sum_j\theta_j\Gamma^j_{ik} \qquad (1.6.10)$$

并且有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\theta = \sum_k\theta_{k;i}\mathrm{d}x_k,\ \nabla_X\theta = \sum_{i,k}X^i\theta_{k;i}\mathrm{d}x_k \qquad (1.6.11)$$

3. (r,s) 型张量场 T 沿切方向 X 的协变微商 $\nabla_X T$

定义 1.6.2 设 $T\in C^\infty(M;T^r_s(M))$，$X\in C^\infty(M;T(M))$，$T$ 沿 X 的协变微商是映射 $\nabla_X: C^\infty(M;T^r_s(M))\to C^\infty(M;T^r_s(M))$

$$\begin{aligned}
&\nabla_X T(\theta^1,\cdots,\theta^r,Y_1,\cdots,Y_s)\\
\triangleq\ &\nabla_X T(\theta^1,\cdots,\theta^r,Y_1,\cdots,Y_s)-T(\nabla_X\theta^1,\theta^2,\cdots,\theta^r,Y_1,\cdots,Y_s)\\
&-\cdots-T(\theta^1,\cdots,\nabla_X\theta^r,Y_1,\cdots,Y_s)-T(\theta^1,\cdots,\theta^r,\nabla_X Y_1,\cdots,Y_s)\\
&-\cdots-T(\theta^1,\cdots,\theta^r,Y_1,\cdots,\nabla_X Y_s)
\end{aligned}\tag{1.6.12}$$

其中 $\theta^j\in C^\infty(M;T^*(M))$，$Y_j\in C^\infty(M;T(M))$，易证 $\nabla_X T$ 是 $r+s$ 重线性映射，所以 $\nabla_X T\in C^\infty(M;T_s^r(M))$. 式(1.6.12)是函数的等式.

局部 (V,φ,x_i) 上，(r,s) 型张量场 T 是 r 个反变张量场和 s 个协变张量场的张量积：

$$T=\sum_{j_1,\cdots,j_r,k_1,\cdots,k_s} t_{k_1\cdots k_s}^{j_1\cdots j_r}X_{j_1}\otimes\cdots\otimes X_{j_r}\otimes\omega^{k_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{k_s}$$

其中 $t_{k_1\cdots k_s}^{j_1\cdots j_r}=T\left(\omega^{j_1},\cdots,\omega^{j_r},X_{k_1},\cdots,X_{k_s}\right)\in C^\infty(V;R)$，$T$ 也是 $r+s$ 重线性映射，在式(1.6.12)中取 $\theta^1=\omega^{j_1},\cdots,\theta^r=\omega^{j_r}$，$Y_1=X_{k_1},\cdots,Y_s=Y_{k_s}$，再由 $\nabla_{X_i}X_j=\sum_k\Gamma_{ij}^k X_k$ 及 $\nabla_{X_i}\omega^j=-\sum_k\Gamma_{ik}^i\omega^k$ 得

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla_{X_i}T\right)\left(\omega^{j_1},\cdots,\omega^{j_r},X_{k_1},\cdots,X_{k_s}\right)\\
=\ &X_i\left(t_{k_1\cdots k_s}^{j_1\cdots j_r}\right)+\sum_l t_{k_1\cdots k_s}^{lj_2\cdots j_r}\Gamma_{il}^{j_1}+\cdots+\sum_l t_{k_1\cdots k_s}^{j_1\cdots j_{r-1}l}\Gamma_{il}^{jr}\\
&-\sum_l t_{lk_2\cdots k_s}^{j_1\cdots j_r}\Gamma_{ik_1}^l-\cdots-\sum_l t_{k_1\cdots k_{s-1}l}^{j_1\cdots j_r}\Gamma_{ik_s}^l\\
\triangleq\ &t_{k_1\cdots k_s;i}^{j_1\cdots j_r}
\end{aligned}\tag{1.6.13}$$

其中 $t_{k_1\cdots k_s;i}^{j_1\cdots j_r}$ 是上面 $r+s+1$ 项的代数和，它称为张量场 T 的分量函数 $t_{k_1\cdots k_s}^{j_1\cdots j_r}$ 沿切方向 X_i 的协变导数.

4. 几种特例

(1) 设 $T\in C^\infty(M;T_0^2(M))$，局部上，$T=\sum_{j,k}t^{jk}X_j\otimes X_k$，其中 $t^{jk}=T(\omega^j,\omega^k)\in C^\infty(V;R)$，$X=\sum_i\alpha^i X_i$，那么 T 的分量函数 t^{jk} 沿切方向 X_i 的协变导数为

$$t^{jk}_{;i} = X_i(t^{jk}) + \sum_l t^{lk}\Gamma^j_{il} + \sum_l t^{jl}\Gamma^k_{il} \tag{1.6.14}$$

并且有

$$\nabla_{X_i}T = \sum_{j,k} t^{jk}_{;i} X_j \otimes X_k; \quad t^{jk}_{;i} = (\nabla_{X_i}T)(\omega^j, \omega^k) \tag{1.6.15}$$

$$\nabla_X T = \sum_{i,j,k} \alpha^i t^{jk}_{;i} X_j \otimes X_k$$

(2) 设 $T \in C^\infty(M; T^1_1(M))$，由式(1.6.12)式得

$$(\nabla_X T)(\omega, Y) = \nabla_X T(\omega, Y) - T(\nabla_X \omega, Y) - T(\omega, \nabla_X Y) \tag{1.6.16}$$

局部上，$T = \sum_{j,k} T^j_k X_j \otimes \omega^k$，其中 $t^j_k = T(\omega^j, X_k) \in C^\infty(V; R)$，$T$ 的分量函数 t^j_k 沿切方向 X_i 的协变导数为

$$t^j_{k;i} = X_i(t^j_k) + \sum_l t^l_k \Gamma^j_{il} - \sum_l t^j_l \Gamma^l_{ik} \tag{1.6.17}$$

并且有

$$\nabla_{X_i}T = \sum_{j,k} t^j_{k;i} X_j \otimes \omega^k; \quad t^j_{k;i} = (\nabla_{X_i}T)(\omega^j, X_k) \tag{1.6.18}$$

(3) 设 $T \in C^\infty(M, T^0_2(M))$，由式(1.6.12)得

$$(\nabla_X T)(Y, Z) = \nabla_X T(Y, Z) - T(\nabla_X Y, Z) - T(Y, \nabla_X Z) \tag{1.6.19}$$

局部(V, φ, x_i)上，$T = \sum_{j,k} t_{jk}\omega^j \otimes \omega^k$，其中 $t_{jk} = T(X_j, X_k) \in C^\infty(V; R)$，$t_{jk}$ 沿 X_i 的协变导数为

$$t_{jk;i} = X_i(t_{jk}) - \sum_l t_{lk}\Gamma^l_{ij} - \sum_l t_{jl}\Gamma^l_{ik} \tag{1.6.20}$$

并且有

$$\nabla_{X_i}T = \sum_{j,k} t_{jk;i}\omega^j \otimes \omega^k, \quad t_{jk;i} = (\nabla_{X_i}T)(X_j, X_k) \tag{1.6.21}$$

读者可写出(1,2)型张量场 T 及(1,3)型张量场 T 沿切方向

X 的表达式,及分量函数沿 X_i 的协变导数.

注 (1) 设 $\omega \in C^\infty(M;T^r_s(M)),\theta \in C^\infty(M;T^h_t(M))$,则有

$$\nabla_X(\omega \otimes \theta) = \nabla_X\omega \otimes \theta + \omega \otimes \nabla_X\theta \tag{1.6.22}$$

(2) 设 $\omega \in C^\infty(M;T_r(M)),\theta \in C^\infty(M;T_s(M))$,则有

$$\nabla_X(\omega \wedge \theta) = \nabla_X\omega \wedge \theta + \omega \wedge \nabla_X\theta \tag{1.6.23}$$

关于式(1.6.22)及式(1.6.23)的证明留作练习.

注 当 $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 时,式(1.6.14),式(1.6.17),式(1.6.20)仍成立. 如 $T = \sum\limits_{j,k} t_{jk}\mathrm{d}x_j \otimes \mathrm{d}x_k$,$t_{jk}$ 沿 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 的协变导数为

$$t_{jk;i} = \frac{\partial}{\partial x_i}t_{jk} - \sum_l t_{lk}\Gamma^l_{ij} - \sum_l t_{jl}\Gamma^l_{ik} \tag{1.6.24}$$

其中 $t_{jk} = T\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j},\dfrac{\partial}{\partial x_k}\right)$,$t_{jk;i} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} T\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j},\dfrac{\partial}{\partial x_k}\right)$.

1.7 张量场 T 的绝对微分 DT 及 $\nabla_X T$ 与 DT 的关系

定义 1.7.1 若映射 $D:C^\infty(M;T^r_s(M))\to C^\infty(M;T^r_{s+1}(M))$满足

(1) $D(fT) = \mathrm{d}f \otimes T + fDT$

(2) $D(T + \bar{T}) = DT + D\bar{T}$

其中 $f\in C^\infty(M;R)$,$T,\bar{T} \in C^\infty(M;T^r_s(M))$,则称 DT 是微分流形 M^n 上的(r,s)型张量场 T 的绝对微分,DT 是$(r,s+1)$型张量场.

下面给出绝对微分的局部表示式,设 V 是 M^n 的坐标域,$X_1,\cdots,X_n$ 是 V 上的一般切标架场,$\omega^1,\cdots,\omega^n$ 为其对偶.

1. 切向量场 Y 的绝对微分 DT 和局部表示

由于 $DX_i \in C^\infty(M;T^1_1(M))$,故可设

$$DX_i = \sum_j \omega_i^j \otimes X_j \tag{1.7.1}$$

其中 $\omega_i^j \in C^\infty(M;T_1^0(M)) = C^\infty(M;T^*(M))$,故可再设 $\omega_i^j = \sum_k \alpha_{ik}^j \omega^k$,得 $\alpha_{ik}^j = \omega_i^j(X_k) = \Gamma_{ki}^j$,从而 $\omega_i^j = \sum_k \Gamma_{ki}^j \omega^k$,所以

$$DX_i = \sum_j \omega_i^j \otimes X_j = \sum_{j,k} \Gamma_{ki}^j \omega^k \otimes X_j \tag{1.7.2}$$

由此得 $(DX_i)(X_l) = \sum_j \Gamma_{li}^j X_j = \nabla_{X_l} X_i$,即得联络 ∇ 和绝对微分的关系是:

$$(DX_j)(X_i) = \nabla_{X_i} X_j \tag{1.7.3}$$

或直接定义式(1.7.3),可得基 X_i 的绝对微分 DX_i 的表达式(1.7.2),由式(1.7.3)得

$$(DY)(X) = \nabla_X Y \tag{1.7.4}$$

设 $Y = \sum_j \beta^j X_j$,由定义 1.7.1 得 Y 的绝对微分

$$\begin{aligned} DY &= \sum_j \mathrm{d}\beta^j \otimes X_j + \sum_j \beta^j DX_j \\ &= \sum_k \left(\mathrm{d}\beta^k + \sum_j \beta^j \omega_j^k\right) \otimes X_k \\ &\triangleq \sum_k D\beta^k \otimes X_k \end{aligned} \tag{1.7.5}$$

其中 $\quad D\beta^k = \mathrm{d}\beta^k + \sum_j \beta^j \omega_j^k$

$$= \sum_i \left[X_i(\beta^k) + \sum_j \beta^j \Gamma_{ij}^k\right]\omega^i = \sum_i \beta^k_{;i}\omega^i \tag{1.7.6}$$

称为 Y 的分量函数 β^k 的绝对微分,它是(0,1)型张量场,上式给出了一般微分 $\mathrm{d}\beta^k$ 与绝对微分 $D\beta^k$ 及 $D\beta^k$ 与协变导数 $\beta^k_{;i}$ 之间的关系.

当 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$,$\omega^j = \mathrm{d}x_j$ 时,$Y = \sum_k Y^k \frac{\partial}{\partial x_k}$,其中 $Y^k = \mathrm{d}x_k(Y) = Y(x_k) \in C^\infty(V;R)$,上式为

$$DY^k = \mathrm{d}Y^k + \sum_j Y^j \omega_j^k = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} Y^k + \sum_j Y^j \Gamma_{ij}^k\right] \mathrm{d}x_i$$

$$= \sum_i Y^k_{;i} \mathrm{d}x_i \tag{1.7.7}$$

注 绝对微分 D 也可用联络符号∇来写.

2. 余切向量场 θ 的绝对微分 $D\theta$ 及局部表示

由于 $\omega^i(X_j)=\delta^i_j$ 是常值函数,并且 $D\omega^i \in C^\infty(V;T^0_2(V))$,故可有以下定义:

定义 1.7.2 ω^i 的绝对微分$D\omega^i$ 由下式给出:

$$(D\omega^i)(X_k,X_j)+(DX_j)(X_k,\omega^i)=\mathrm{d}\delta^i_j=0 \tag{1.7.8}$$

由式(1.7.8) 及式(1.7.2) 得

$$\begin{aligned}(D\omega^i)(X_k,X_j) &= -(DX_j)(X_k,\omega^i)\\ &= -\sum_{l,m}\Gamma^m_{lj}(\omega^l\otimes X_m)(X_k,\omega^i)\\ &= -\sum_{l,m}\Gamma^m_{lj}\omega^l(X_k)\omega^i(X_m) = -\Gamma^i_{kj}\end{aligned}$$

所以 $D\omega^i$ 的局部表示式为

$$D\omega^i = -\sum_{j,k}\Gamma^i_{kj}\omega^k\otimes\omega^j = -\sum_j \omega^i_j\otimes\omega^j \tag{1.7.9}$$

由式(1.7.9) 并参见式(1.6.9) 得:$(D\omega^i)(X_l) = -\sum_j \omega^i_j(X_l)\omega^j = -\sum_j \Gamma^i_{lj}\omega^j = \nabla_{X_l}\omega^i$,即得

$$\nabla_{X_i}\omega^j = (D\omega^j)(X_i),\qquad \nabla_X\theta = (D\theta)(X) \tag{1.7.10}$$

上式就是绝对微分与协变微商的关系,局部(V,φ,x_i)上,设 $\theta = \sum_j \theta_j\omega^j$,其中 $\theta_j = \theta(X_j)\in C^\infty(V;R)$,由定义 1.7.1 及式(1.7.9) 得 θ 的绝对微分$D\theta$ 为

$$\begin{aligned}D\theta &= \sum_j \mathrm{d}\theta_j\otimes\omega^j + \sum_j\theta_j D\omega^j\\ &= \sum_j \mathrm{d}\theta_j\otimes\omega^j - \sum_{j,k}\theta_j\omega^j_k\otimes\omega^k\\ &= \sum_k\Big[\mathrm{d}\theta_k - \sum_j\theta_j\omega^j_k\Big]\otimes\omega^k\\ &\triangleq \sum_k D\theta_k\otimes\omega^k\end{aligned} \tag{1.7.11}$$

其中 θ 的分量函数 θ_k 的绝对微分 $D\theta_k$ 为

$$D\theta_k = \mathrm{d}\theta_k - \sum_j \theta_j \omega_k^j = \sum_i X_i(\theta_k)\omega^i - \sum_{i,j}\theta_j \Gamma_{ik}^j \omega^i$$

$$= \sum_i \left[X_i(\theta_k) - \sum_j \theta_j \Gamma_{ik}^j \right]\omega^i = \sum_i \theta_{k;i}\omega^i \quad (1.7.12)$$

注 式(1.7.9)也可由式(1.7.10)确定.

3.(r,s)型张量场T的绝对微分DT

定义1.7.3 设$T \in C^\infty\left(M; T_{s_1}^{r_1}(M)\right)$,$\bar{T} \in C^\infty\left(M; T_{s_2}^{r_2}(M)\right)$,张量积$T \otimes \bar{T}$的绝对微分$D(T \otimes \bar{T})$定义为

$$D(T \otimes \bar{T}) = DT \otimes \bar{T} + T \otimes D\bar{T}. \quad (1.7.13)$$

为了方便起见,我们只求(1,2)型张量场T的绝对微分. 设$T \in C^\infty(M; T_2^1(M))$,局部上,

$$T = \sum_{i,j,k} t_{jk}^i X_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k$$

由定义1.7.1及定义1.7.3和式(1.7.2)及式(1.7.9)得

$$\begin{aligned}
DT &= \sum_{i,j,k} \mathrm{d}t_{jk}^i \otimes X_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k + \sum_{i,j,k} t_{jk}^i DX_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k \\
&\quad + \sum_{i,j,k} t_{jk}^i X_i \otimes D\omega^j \otimes \omega^k + \sum_{i,j,k} t_{jk}^i X_i \otimes \omega^j \otimes D\omega^k \\
&= \sum_{i,j,k} \mathrm{d}t_{jk}^i \otimes X_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k + \sum_{i,j,k} t_{jk}^i \sum_l \omega_i^l \otimes X_l \otimes \omega^j \otimes \omega^k \\
&\quad - \sum_{i,j,k} t_{jk}^i X_i \otimes \sum_l \omega_l^j \otimes \omega^l \otimes \omega^k \\
&\quad - \sum_{i,j,k} t_{jk}^i X_i \otimes \omega^j \otimes \sum_l \omega_l^k \otimes \omega^l \\
&= \sum_{i,j,k} \left(\mathrm{d}t_{jk}^i + \sum_l t_{jk}^l \omega_l^i - \sum_l t_{lk}^i \omega_j^l - \sum_l t_{jl}^i \omega_k^l \right) X_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k \\
&\triangleq \sum_{i,j,k} Dt_{jk}^i \otimes X_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k
\end{aligned} \quad (1.7.14)$$

T的分量函数t_{jk}^i的绝对微分Dt_{jk}^i为

$$Dt_{jk}^i = \mathrm{d}t_{jk}^i + \sum_l t_{jk}^l \omega_l^i - \sum_l t_{lk}^i \omega_j^l - \sum_l t_{jl}^i \omega_k^l = \sum_l t_{jk;l}^i \omega^l \quad (1.7.15)$$

并且有

$$\nabla_X T = (DT)(X) \quad (1.7.16)$$

式(1.7.15)给出了 t^i_{jk} 的协变导数与绝对微分的关系,也就是说,要证明有关协变导数的命题,只需计算其绝对微分便可.

定理 1.7.1 设 ∇ 是微分流形 M^n 上的无挠线性联络,$R = \sum\limits_{i,j,k,l} R^j_{ikl} X_j \otimes \omega^i \otimes \omega^k \otimes \omega^l$ 是(1,3)型张量场,则第二 Bianchi 恒等式的局部表达式成立:

$$R^j_{ikl;m} + R^j_{ilm;k} + R^j_{imk;l} = 0 \tag{1.7.17}$$

证明: R^j_{ikl} 的绝对微分是

$$\begin{aligned} DR^j_{ikl} &= dR^j_{ikl} + \sum_m R^m_{ikl}\omega^j_m - \sum_m R^j_{mkl}\omega^m_i - \sum_m R^j_{iml}\omega^m_k - \sum_m R^j_{ikm}\omega^m_l \\ &= \sum_m R^j_{ikl;m}\omega^m \end{aligned} \tag{1.7.18}$$

由线性联络 ∇ 的第二结构方程 $\Omega^j_i = d\omega^j_i - \sum\limits_k \omega^k_i \wedge \omega^j_k$ 及曲率形式 $\Omega^j_i = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k,l} R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l$ 得

$$\begin{aligned} d\Omega^j_i &= d(d\omega^j_i) - \sum_k d\omega^k_i \wedge \omega^j_k + \sum_k \omega^k_i \wedge d\omega^j_k \\ &= 0 - \sum_k \left(\Omega^k_i + \sum_m \omega^m_i \wedge \omega^k_m\right) \wedge \omega^j_k \\ &\quad + \sum_k \omega^k_i \wedge \left(\Omega^j_k + \sum_m \omega^m_k \wedge \omega^j_m\right) \\ &= \sum_m \omega^m_i \wedge \Omega^j_m - \sum_m \Omega^m_i \wedge \omega^j_m \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^j_{mkl}\omega^m_i \wedge \omega^k \wedge \omega^l - \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^m_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^j_m \end{aligned}$$

对 $\Omega^j_i = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k,l} R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l$ 外微分,并由上两式及无挠结构方程得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^j_{mkl}\omega^m_i \wedge \omega^k \wedge \omega^l - \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^m_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^j_m \\ &= d\Omega^j_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,l} dR^j_{ikl} \wedge \omega^k \wedge \omega^l + \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^j_{ikl} d\omega^k \wedge \omega^l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^j_{ikl}\omega^k \wedge d\omega^l \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ j}_{ikl;m}\omega^m \wedge \omega^k \wedge \omega^l - \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ m}_{ikl}\omega^j_m \wedge \omega^k \wedge \omega^l \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ j}_{mkl}\omega^m_i \wedge \omega^k \wedge \omega^l + \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ j}_{iml}\omega^m_k \wedge \omega^k \wedge \omega^l \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ j}_{ikm}\omega^m_l \wedge \omega^k \wedge \omega^l - \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ j}_{ikl}\omega^k_m \wedge \omega^m \wedge \omega^l \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ j}_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l_m \wedge \omega^m \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ j}_{ikl;m}\omega^m \wedge \omega^k \wedge \omega^l - \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ m}_{ikl}\omega^j_m \wedge \omega^k \wedge \omega^l \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R^{\ j}_{mkl}\omega^m_i \wedge \omega^k \wedge \omega^l
\end{aligned}
$$

由此得 $\sum\limits_{m,k,l} R^j_{ikl;m}\omega^m \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0$. 即

$$\sum_{m<k<l} (R^j_{ikl;m} + R^j_{ilm;k} + R^j_{imk;l})\omega^m \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0,$$ 故

$$R^j_{ikl;m} + R^j_{ilm;k} + R^j_{imk;l} = 0.$$

4. 高阶绝对微分及高阶协变导数

(1) 设 $Y = \sum\limits_k \beta^k X_k \in C^\infty(V; T(V))$,则

$$DY = \sum_k D\beta^k \otimes X_k = \sum_{i,k} \beta^k_{\ ;i}\omega^i \otimes X_k \tag{1.7.19}$$

$$D\beta^k = \mathrm{d}\beta^k + \sum_l \beta^l \omega^k_l = \sum_i \beta^k_{\ ;i}\omega^i \tag{1.7.20}$$

其中 $\beta^k_{\ ;i}$ 称为 β^k 的一阶协变导数, $\beta^k_{\ ;i}$ 的绝对微分是

$$D\beta^k_{\ ;i} = \mathrm{d}\beta^k_{\ ;i} + \sum_l \beta^l_{\ ;i}\omega^k_l - \sum_l \beta^k_{\ ;l}\omega^l_i = \sum_j \beta^k_{\ ;ij}\omega^j \tag{1.7.21}$$

其中 $\beta^k_{\ ;ij}$ 叫 β^k 的二阶协变导数,并且 Y 的二阶绝对微分为

$$D^2 Y = D(DY) = \sum_{i,k} D\beta^k_{\ ;i} \otimes \omega^i \otimes X_k = \sum_{i,j,k} \beta^k_{\ ;ij}\omega^j \otimes \omega^i \otimes X_k \tag{1.7.22}$$

$D^2 Y$ 是(1,2)型张量场,其分量 $\beta^k_{\ ;ij}$ 的绝对微分是

$$D\beta^k_{;ij} = \mathrm{d}\beta^k_{;ij} + \sum_l \beta^l_{;ij}\omega^k_l - \sum_l \beta^k_{;lj}\omega^l_i - \sum_l \beta^k_{;il}\omega^l_j$$

$$= \sum_m \beta^k_{;ijm}\omega^m \tag{1.7.23}$$

其中 $\beta^k_{;ijm}$ 称为β^k 的三阶协变导数,类似可定义 β^k 的更高阶协变导数及 $D^3(Y)$.

(2) 设 $\theta = \sum_k \theta_k\omega^k \in C^\infty(V;T^*(V))$,则 θ 的一阶、二阶绝对微分及 θ_k 的一阶、二阶协变导数如下:

$$D\theta = \sum_k D\theta_k \otimes \omega^k = \sum_{i,k} \theta_{k;i}\omega^i \otimes \omega^k \tag{1.7.24}$$

$$D\theta_k = \mathrm{d}\theta_k - \sum_l \theta_l\omega^l_k = \sum_i \theta_{k;i}\omega^i \tag{1.7.25}$$

$$D^2\theta = \sum_{i,k} D\theta_{k;i} \otimes \omega^i \otimes \omega^k = \sum_{i,j,k} \theta_{k;ij}\omega^j \otimes \omega^i \otimes \omega^k \tag{1.7.26}$$

$$D\theta_{k;i} = \mathrm{d}\theta_{k;i} - \sum_l \theta_{l;i}\omega^l_k - \sum_l \theta_{k;l}\omega^l_i = \sum_j \theta_{k;ij}\omega^j \tag{1.7.27}$$

其中 $\theta_{k;i}$ 及 $\theta_{k;ij}$ 分别是θ_k 的一阶和二阶协变导数,同理可定义高阶协变导数及高阶绝对微分.

注 对于(r,s)型张量场 T,类似可定义 T 的高阶绝对微分及分量函数的高阶协变导数.

5. 流形 M^n 上函数 f 的高阶绝对微分

设 $f \in C^\infty(M;R)$,规定流形 M 上的函数的绝对微分就是普通微分,即 $Df = \mathrm{d}f$,从而

$$\nabla_X f = (Df)(X) = \mathrm{d}f(X) = Xf \tag{1.7.28}$$

而 D^2f 是$(0,2)$型张量场,记 $\theta = Df = \mathrm{d}f$,那么

$$\nabla_X\theta = (D\theta)(X) = (D^2f)(X)$$

由式(1.6.6),并记 $(D^2f)(Y,X) \triangleq [(D^2f)(X)](Y) = (\nabla_X\theta)(Y) = \nabla_X\theta(Y) - \theta(\nabla_XY) = \nabla_X\mathrm{d}f(Y) - \mathrm{d}f(\nabla_XY) =$

$\nabla_X Yf - (\nabla_X Y)f = X(Yf) - (\nabla_X Y)f$,所以有

$$(D^2 f)(Y,X) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f \tag{1.7.29}$$

易证 $D^2 f$ 是双线性的,从而 $D^2 f$ 是(0,2)型张量场.

局部(V,φ,x_i)上,f 沿切方向$\frac{\partial}{\partial x_i}$的协变导数

$$f_{;i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f \tag{1.7.30}$$

f 的一阶和二阶绝对微分的局部表示为

$$Df = \mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \sum_i f_{;i}\mathrm{d}x_i \tag{1.7.31}$$

$$D^2 f = \sum_i Df_{;i} \otimes \mathrm{d}x_i = \sum_{i,j} f_{;ij}\mathrm{d}x_j \otimes \mathrm{d}x_i \tag{1.7.32}$$

其中 $f_{;ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_{;i} - \sum_k f_{;k}\Gamma^k_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\Gamma^k_{ji}$,并且

$$f_{;ij} - f_{;ji} = \sum_k f_{;k}(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) = \sum_k f_{;k}T^k_{ij} \tag{1.7.33}$$

例 1 设 $f \in C^\infty(M;R)$,试证

$$f_{;ijk} - f_{;ikj} = \sum_l f_{;il}T^l_{jk} + \sum_l f_{;l}R^{\ l}_{ijk} \tag{1.7.34}$$

证明:由二阶协变导数的定义得

$$\mathrm{d}f_{;i} = \sum_j f_{;ij}\omega^j + \sum_j f_{;j}\omega^j_i \tag{1.7.35}$$

对式(1.7.35)外微分,并由三阶协变导数的定义及结构方程得:

$$\begin{aligned}
0 = \mathrm{d}(\mathrm{d}f_{;i}) &= \sum_j \mathrm{d}f_{;ij} \wedge \omega^j + \sum_j f_{;ij}\mathrm{d}\omega^j \\
&\quad + \sum_j \mathrm{d}f_{;j} \wedge \omega^j_i + \sum_j f_{;j}\mathrm{d}\omega^j_i \\
&= \sum_{j,k} f_{;ijk}\omega^k \wedge \omega^j + \sum_{j,k} f_{;kj}\omega^k_i \wedge \omega^j + \sum_{j,k} f_{;ik}\omega^k_j \wedge \omega^j \\
&\quad - \sum_{j,k} f_{;ij}\omega^j_k \wedge \omega^k + \frac{1}{2}\sum_{j,k,l} f_{;ij}T^j_{kl}\omega^k \wedge \omega^l \\
&\quad + \sum_{j,k} f_{;jk}\omega^k \wedge \omega^j_i + \sum_{j,k} f_{;k}\omega^k_j \wedge \omega^j_i
\end{aligned}$$

$$+\sum_{j,k} f_{;j}\omega_i^k \wedge \omega_k^j + \frac{1}{2}\sum_{j,k,l} f_{;j}R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l$$

$$=\sum_{j,k}\left[f_{;ijk} - \frac{1}{2}\sum_l f_{;il}T^l_{jk} - \frac{1}{2}\sum_l f_{;l}R^l_{ijk}\right]\omega^k \wedge \omega^j$$

所以 $f_{;ijk} - f_{;ikj} = \sum_l f_{;il}T^l_{jk} + \sum_l f_{;l}R^l_{ijk}$,其中用到了 $\omega^j \wedge \omega^k = -\omega^k \wedge \omega^j, T^l_{kj} = -T^l_{jk}, R^l_{ikj} = -R^l_{ijk}$.

例 2 设 $Y = \sum_k \beta^k X_k \in C^\infty(V;T(V))$,证明

$$\beta^k_{;ij} - \beta^k_{;ji} = \sum_l \beta^k_{;l}T^l_{ij} - \sum_l \beta^l R^k_{lij} \tag{1.7.36}$$

证明:由一阶协变导数的定义得

$$\mathrm{d}\beta^k = \sum_i \beta^k_{;i}\omega^i - \sum_l \beta^l \omega^k_l \tag{1.7.37}$$

对式(1.7.37)外微分,并由二阶协变导数的定义和结构方程得

$$0 = \mathrm{d}(\mathrm{d}\beta^k) = \sum_i \mathrm{d}\beta^k_{;i} \wedge \omega^i + \sum_i \beta^k_{;i}\mathrm{d}\omega^i$$

$$-\sum_l \mathrm{d}\beta^l \wedge \omega^k_l - \sum_l \beta^k \mathrm{d}\omega^k_l$$

$$=\sum_{i,j}\beta^k_{;ij}\omega^j \wedge \omega^i - \sum_{i,l}\beta^l_{;i}\omega^k_l \wedge \omega^i + \sum_{i,l}\beta^k_{;l}\omega^l_i \wedge \omega^i$$

$$-\sum_{i,l}\beta^k_{;i}\omega^i_l \wedge \omega^l + \frac{1}{2}\sum_{i,j,l}\beta^k_{;i}T^i_{jl}\omega^j \wedge \omega^l$$

$$-\sum_{i,l}\beta^l_{;i}\omega^i \wedge \omega^k_l + \sum_{j,l}\beta^j\omega^l_j \wedge \omega^k_l$$

$$-\sum_{l,j}\beta^l\omega^j_l \wedge \omega^k_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j,l}\beta^l R^k_{lij}\omega^i \wedge \omega^j$$

$$=\sum_{i,j}\left[\beta^k_{;ij} - \frac{1}{2}\sum_l \beta^k_{;l}T^l_{ij} + \frac{1}{2}\sum_l \beta^l R^k_{lij}\right]\omega^j \wedge \omega^i$$

因此
$$\beta^k_{;ij} - \beta^k_{;ji} = \sum_l \beta^k_{;l}T^l_{ij} - \sum_l \beta^l R^k_{lij}$$

习 题 一

1. 设 M 是 R^2 中的椭圆,即

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 \left| \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right. \right\}$$

证明：M 是一维 C^∞ 微分流形.

2. 设 S^n 是 R^{n+1} 中以原点为中心，以 a 为半径的球面，即

$$S^n = \{ x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = a^2 \}$$

证明：S^n 是 n 维 C^∞ 微分流形.

3. 设 M 是 R^3 中过 $M_0(a, b, c)$ 点，以 $\{l, m, n\}$ 为方向矢量的直线，即

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \left| \frac{x_1 - a}{l} = \frac{x_2 - b}{m} = \frac{x_3 - c}{n} \right. \right\}$$

证明：M 是一维 C^∞ 微分流形.

4. 设 (V, φ, x_i) 是 n 维微分流形 M^n 的局部坐标系，定义 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 如下：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}: C^\infty(V; R) \to C^\infty(V; R), \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \circ \varphi$$

证明：$\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ 是切向量场，并且线性无关.

5. 设 (V, φ, x_i) 是微分流形 M^n 的局部坐标系，定义 $\mathrm{d}x_i$ 如下：

$$\mathrm{d}x_i: C^\infty(V; T(V)) \to C^\infty(V; R), \quad \mathrm{d}x_i(X) = X(x_i)$$

证明：$\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 是 V 上的余切向量场，并且线性无关.

6. 证明式(1.2.5)、式(1.2.6) 和式(1.2.7) 成立.

7. 证明由式(1.3.7) 定义的联络 ∇ 是 R^{n+1} 上的线性联络.

8. 证明定理 1.4.2.

9. 证明定理 1.4.3 中的(1) 和(3).

10. 给出 R^3 中的切向量场 $X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, Z = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$，计算$[X, Y]$、$[X, Z]$ 和$[Y, Z]$.

11. 在 $n \times n$ 阶矩阵构成的向量空间 $M_{nn}(R)$ 中定义任两矩

阵 A 与 B 的运算如下：

$$[A,B] = AB - BA$$

证明：它满足括号积的三种性质：(1) 双线性；(2) 反称性；(3) Jacobi 恒等式成立.

12. 设 R 是由定义 1.4.4 中给出的(1,3) 型曲率张量场，证明：对任 $X,Y,Y_1,Y_2,Z \in C^\infty(M;R)$ 及 $f \in C^\infty(M;R)$，有

(1) $R(X,fY)Z = fR(X,Y)Z$

(2) $R(X,Y_1+Y_2)Z = R(X,Y_1)Z + R(X,Y_2)Z$

13. 证明定理 1.5.1.

14. 证明定理 1.5.4 和定理 1.5.5.

15. 设 $\omega_1 = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y + f_3\mathrm{d}z \in \Lambda^1(R^3)$，$\omega_2 = g_1\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + g_2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + g_3\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \in \Lambda^2(R^3)$，$\omega_3 = g\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \in \Lambda^3(R^3)$，求 $\mathrm{d}\omega_1, \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_1); \mathrm{d}\omega_2, \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_2); \mathrm{d}\omega_3$.

16. 证明由式(1.6.6)定义的 $\nabla_X\theta$ 是 M^n 上的(0,1)型张量场，即 $\nabla_X\theta \in C^\infty(M;T^*(M))$.

17. 写出(1,2) 型张量场 T 及(1,3) 型张量场 T 沿切方向 X 的表达式；并写出分量函数沿 X_i 的协变导数.

18. 证明式(1.6.22) 和式(1.6.23) 成立.

19. 证明由(1.7.29) 定义的 D^2f 是对称的(0,2) 型张量场.

20. 设 $T = \sum_{i,j,k} t_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \otimes \mathrm{d}x_k$ 是微分流形 M^n 在局部 (V,φ,x_i) 上的(1,2)型张量场，证明：

$$t^{ij}_{k;pq} - t^{ij}_{k;qp} = -\sum_l t^{lj}_k R^i_{lpq} - \sum_l t^{il}_k R^j_{lpq} + \sum_l t^{ij}_{k;l} T^l_{pq} + \sum_l t^{ij}_l R^l_{kpq}.$$

第二章 黎曼流形

2.1 Riemann 度量

1. 基本概念

设 M 是 n 维 C^∞ 微分流形，$T_2(M)_p = T_p^*(M) \otimes T_p^*(M) = L(T_p(M), T_p(M); R)$ 是 M 上 p 点的二阶协变张量空间，$T_p(M) = \bigcup_{p \in M} T_2(M)_p$ 是 M 上的二阶协变张量丛，设 $C^\infty(M; T_2(M))$ 是 M 上的二阶协变张量场构成的向量空间，即它是张量丛 $T_2(M)$ 上的光滑截面的全体.

定义 2.1.1 微分流形 M^n 上的二阶协变张量场 g 称为对称正定的，若任 $p \in M$，张量 g_p 是对称正定的，即

(1) 对称性：$g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$ (2.1.1)

(2) 正定性：$g_p(X_p, X_p) \geqslant 0$，且

$$g_p(X_p, X_p) = 0 \Leftrightarrow X_p = 0 \tag{2.1.2}$$

其中 X_p 和 Y_p 是 p 点的切向量，即 $X_p, Y_p \in T_p(M)$.

设 $g \in C^\infty(M; T_2(M))$ 是微分流形 M^n 上的二阶协变张量场，$X, Y \in C^\infty(M; T(M))$，若定义

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p) \tag{2.1.3}$$

那么 g 是对称和正定的，分别等价于

(3) $g(X, Y) = g(Y, X)$ (2.1.4)

(4) $g(X, X) \geqslant 0$ 且 $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (2.1.5)

局部上，式(2.1.4)等价于 $g_{ij} = g(X_i, X_j) = g(X_j, X_i) = g_{ji}$；式(2.1.5)等价于：任 $X_i \neq 0$，有 $g_{ii} = g(X_i, X_i) > 0$.

定义 2.1.2 微分流形 M^n 带上一个二阶协变对称正定的张量场 g，则(M^n, g)叫 n 维 Riemann 流形，g 称为 Riemann 度量.

设(M^n,g)是 n 维 Riemann 流形，则任 $p\in M$，p 点的切空间 $T_p(M)$是一个 n 维欧氏向量空间，在 $T_p(M)$中可定义内积$<,>$：

$$<X_p,Y_p>=g_p(X_p,Y_p) \qquad (2.1.6)$$

于是有以下性质：

(1) $T_p(M)$中切向量 X_p 的长度为

$$|X_p|=\sqrt{g_p(X_p,X_p)} \qquad (2.1.7)$$

(2) Schwarz 不等式成立

$$g_p^2(X_p,Y_p)\leqslant g_p(X_p,X_p)\cdot g_p(Y_p,Y_p) \qquad (2.1.8)$$

(3) $T_p(M)$中两非零切向量 X_p、Y_p 的夹角$\angle(X_p,Y_p)$的余弦为

$$\cos\angle(X_p,Y_p)=\frac{g_p(X_p,Y_p)}{\sqrt{g_p(X_p,X_p)}\sqrt{g_p(Y_p,Y_p)}} \qquad (2.1.9)$$

(4) $T_p(M)$中有标准正交基 $e_{1_p},\cdots,e_{n_p}$，即

$$g_p(e_{i_p},e_{j_p})=\delta_{ij}=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j.\end{cases}$$

由此得(M,g)上有标准正交的切标架场 $e_1,\cdots,e_n$，$g(e_i,e_j)=\delta_{ij}$.

2. 度量张量场 g 的局部表示及性质

设(V,φ,x_i)是黎曼流形(M^n,g)上 p 点的坐标系，$X_1,\cdots,X_n$ 是 V 上的一般切标架场，$\omega^1,\cdots,\omega^n$ 是其对偶，即 $\omega^i(X_j)=\delta_j^i$；$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$是坐标标架场，$\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 是其对偶，即$\mathrm{d}x_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\delta_{ij}$；设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 上的标准正交切标架场，即 $g(e_i,e_j)=\delta_{ij}$，对偶为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$，即 $\omega_i(e_j)=\delta_{ij}$. 则 g 在三种标架场上的表示式分别为：

$$g=\sum_{i,j}g_{ij}\omega^i\otimes\omega^j \qquad (2.1.10)$$

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j \tag{2.1.11}$$

$$g = \sum_i \omega_i \otimes \omega_i \tag{2.1.12}$$

式(2.1.10)中的 $g_{ij} = g(X_i, X_j)$；式(2.1.11)中的 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$，因为$g \in C^\infty(M; T_2(M))$，所以映射

$$g: C^\infty(M; T(M)) \times C^\infty(M; T(M)) \to C^\infty(M; R)$$

是 $C^\infty(M;R)$上的线性映射，即

$$g(f_1 X + f_2 \overline{X}, Y) = f_1 g(X, Y) + f_2 g(\overline{X}, Y)$$

$$g(X, f_1 Y + f_2 \overline{Y}) = f_1 g(X, Y) + f_2 g(X, \overline{Y})$$

从而局部(V, φ, x_i)上，设 $X = \sum_i \alpha^i X_i$，$Y = \sum_j \beta^j X_j$，则 X 和 Y 的内积

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} \alpha^i \beta^j \tag{2.1.13}$$

若 $X = \sum_i X^i e_i$，$Y = \sum_j Y^j e_j$，则 X 与 Y 的内积

$$g(X, Y) = \sum_i X^i Y^i \tag{2.1.14}$$

就是普通欧氏空间中的内积.

注 g 与 g_{ij}相互确定，从而可得 $g(X, Y)$，反之亦然.

3. Riemann 度量举例

例 1 设 $M = R^n$，$g = \langle , \rangle$是欧氏内积，证明(R^n, g)是 n 维黎曼流形.

证明：因 R^n 中只有一个整体坐标系，坐标函数为 $x_1, \cdots, x_n$，坐标切向量场就是标准正交切标架场，即

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = (0, \cdots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \cdots, 0) = e_i$$

$i = 1, \cdots, n$. 对 R^n 中任意两切(径)向量场 X 和 Y，有

$$X = (x_1, \cdots, x_n) = \sum_i x_i e_i$$

$$Y = (y_1, \cdots, y_n) = \sum_j y_j e_j$$

X 和 Y 的内积 $g(X,Y) = \sum_i x_i y_i$ 是通常的欧氏内积，$g = \sum_i \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i$，$g_{ij} = \delta_{ij}$，显然 g 是对称正定的，所以 g 是 R^n 上的 Riemann 度量，故 (R^n, g) 是 n 维黎曼流形.

例 2 设 $M = R^n$，R^n 上的整体坐标函数为 $x_1, \cdots, x_n$，设

$$g = \frac{1}{A^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i \tag{2.1.15}$$

其中 $A = 1 + \frac{c}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$，证明 (R^n, g) 也是 n 维黎曼流形.

证明：由式(2.1.15) 得

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{A^2}\delta_{ij} \tag{2.1.16}$$

任 $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$，$X$ 和 Y 的内积为

$$g(X,Y) = \frac{1}{A^2}\sum_i X^i Y^i \tag{2.1.17}$$

显然，由式(2.1.16) 或式(2.1.17) 知，g 是 R^n 上的二阶对称正定的协变张量场，故 (R^n, g) 是 n 维 Riemann 流形.

注 今后我们知，例 1 中的 Riemann 曲率为 0，例 2 中的 Riemann 曲率是 c，它们是 2 个不同的 Riemann 流形.

例 3 设 M^n 是 n 维向量空间，g 是 M^n 上的正定内积，则 (M, g) 是 n 维 Riemann 流形.

4. Riemann 流形 (M, g) 上的度量形式

设 $\sigma: [a, b] \to M^n$ 是黎曼流形 (M, g) 上的分段光滑曲线，T_σ 为曲线 σ 的切向量场，局部 (V, φ, x_i) 上，

$$T_\sigma = \sum_i \frac{\mathrm{d}(x_i \circ \sigma)}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_\sigma \tag{2.1.18}$$

为了方便起见，记 $x_i = x_i \circ \sigma$，$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_\sigma, \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_\sigma\right)$，那么曲线 σ

的弧长 s 是切向量 T_σ 的长度在定义域$[a,b]$上的定积分,即

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{g(T_\sigma, T_\sigma)}\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

从而有

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t$$

由此微分再平方得

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{2.1.20}$$

定义 2.1.3 Riemann 流形(M,g)上的二次微分形式式(2.1.20)称为(M,g)的度量形式,也叫(M,g)上的第一基本形式.

注 度量张量场式(2.1.11)与度量形式式(2.1.20)相互确定,本质上是一样的,故可写作

$$g = \mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j = \sum_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{2.1.21}$$

其中 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \in C^\infty(V;R)$.

设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 上的标准正交切向量场,对偶为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$. 那么有

$$g = \mathrm{d}s^2 = \sum_i \omega_i \otimes \omega_i = \sum_i \omega_i^2 \tag{2.1.22}$$

定理 2.1.1 黎曼流形(M^n,g)上的度量形式 $\mathrm{d}s^2 = \sum_i \omega_i^2$ 是正交变换下的不变量.

证明:设 $e_1,\cdots,e_n$ 和 $\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n$ 是 M^n 的局部坐标域 V 上的两组标准正交切标架场;$\omega_1,\cdots,\omega_n$ 和 $\tilde{\omega}_1,\cdots,\tilde{\omega}_2$ 分别是它们的对偶.

令 $\tilde{e}_i = \sum_j a_{ij}e_j$,其中 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正交方阵,即

$$AA' = I, \text{或} \sum_k a_{ik}a_{jk} = \sum_k a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{2.1.23}$$

再令 $\bar{\omega}_k = \sum_l b_{kl}\omega_l$,则 $\delta_{ik} = \bar{\omega}_k(\bar{e}_i) = \sum_j a_{ij}b_{kj}$,即 $AB' = I$,所以 $B' = A^{-1} = A'$,得 $B = A$,从而

$$\bar{\omega}_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \quad \omega_i = \sum_j a_{ji}\bar{\omega}_j \tag{2.1.24}$$

由此我们得

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= \sum_i \bar{\omega}_i^2 = \sum_i (a_{i1}\omega_1 + \cdots + a_{in}\omega_n)^2 \\ &= \omega_1^2 \sum_i a_{i1}^2 + \cdots + \omega_n^2 \sum_i a_{in}^2 + 2\sum_{j<k}\Big(\sum_i a_{ij}a_{ik}\Big)\omega_j\omega_k \\ &= \omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2 = ds^2 \end{aligned}$$

即 ds^2 是正交变换下的不变量.

5. 诱导度量

我们要用到切映射的概念

定义 2.1.4 设 $F: M^m \to N^n$ 是微分流形间的 C^∞ 映射,F 在 p 点的切映射,F_{*p} 是切空间 $T_p(M)$ 与 $T_{F(p)}(N)$ 之间的映射,定义为

$$F_{*p}(X_p)(g) = X_p(g \circ F) \tag{2.1.25}$$

其中 $X_p \in T_p(M)$,g 是 N 上 $F(p)$ 点的光滑函数,易证 $F_{*p}(X_p)$ 满足

(1) $F_{*p}(X_p)(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha F_{*p}(X_p)(g_1) + \beta F_{*p}(X_p)(g_2)$

(2) $F_{*p}(X_p)(g_1 \cdot g_2) = g_1(F(p))F_{*p}(X_p)(g_2) + g_2(F(p))F_*(X_p)(g_1)$

所以 $F_{*p}(X_p) \in T_{F(p)}(N)$

定理 2.1.2 设 $F: M^m \to N^n$ 是微分流形间的 C^∞ 映射,(V, φ, x_i) 和 (W, ψ, y_i) 分别是 p 点和 $F(p)$ 点的坐标系,从而 $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_p(M)$,$\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{F(p)} \in T_{F(p)}(N)$ 是两组自然基底,则有

$$F_{*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial x_i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{F(p)} \tag{2.1.26}$$

$i = 1,2,\cdots,m$,其中 $m \times n$ 阶矩阵$J(F_{*p}) = \left(\frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}(p)\right)$称为切映射 F_{*p} 的矩阵,$\frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(y_j \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p))$

证明:因坐标函数 $x_i = r_i \circ \varphi, i = 1,\cdots,m; y_j = s_j \circ \psi, j = 1,\cdots,n$. 任 $g \in C^\infty(F(p))$,由复合函数的求导我们有

$$F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right)(g) = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p(g \circ F)$$

$$= \frac{\partial(g \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p))$$

$$= \frac{\partial(g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p))$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(g \circ \psi^{-1})}{\partial s_j}(\psi(F(p))) \cdot \frac{\partial(s_j \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p))$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{F(p)}(g) \cdot \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}(p)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{F(p)}(g)$$

又 g 任意,所以式(2.1.26)成立.

定义 2.1.5 设 $F: M^m \to N^n (m \leqslant n)$是微分流形间的 C^∞ 映射,则:

(1) 若对任 $p \in M$,$m \times n$ 阶矩阵$J(F_{*p})$的秩等于 m,那么 F 称为浸入,$F(M)$(或 M)叫 N 的浸入子流形.

(2) 若对任 $p \in M$,秩 $J(F_{*p}) \equiv m$,并且 $F: M \to F(M)$是微分同胚,则 F 称为嵌入,$F(M)$(或 M)叫 N 的嵌入子流形.

注 1 若 $F: M^m \to N^n$ 是浸入(秩 $J(F_{*p}) \equiv m$),则切空间 $T_p(M)$与 $F_{*p}(T_p(M))$同构,并且 F_{*p}为单射.

注 2 设 $F: M^n \to N^{n+p}$是两微分流形间的 C^∞ 映射,任 $q \in M$,设(V,φ,x_i)和(W,ψ,y_i)分别为 q 和$F(q)$点的坐标系,那么有

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_n)=(y_1\circ F,\cdots,y_{n+p}\circ F)$$

矩阵 $J(F)=J(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})=\left(\dfrac{\partial(y_i\circ F)}{\partial x_j}\right)_{(n+p)\times n}$ 叫映射F 的 Jacobi 矩阵,显然,$J(F)'_p=J(F_{*p})$. 所以秩 $J(F_{*p})=$秩 $J(F)_p$.

我们要用到协变张量场间的拉回映射 F^*,设 $C^\infty(M;T_s(M))$是微分流形 M 上的全体s 阶协变张量场构成的向量空间. 我们给出由切映射 F_{*p}确定的拉回映射F^*的定义如下:

定义 2.1.6 设 $F:M^m\to N^n$ 是流形间的C^∞映射,映射 F^*: $C^\infty(N;T_s(N))\to C^\infty(M;T_s(M))$, $\omega\to F^*(\omega)$定义为

$$(F^*(\omega))_p(X_{1p},\cdots,X_{sp})\stackrel{\Delta}{=}\omega_{F(p)}(F_{*p}(X_{1p}),\cdots,F_{*p}(X_{sp}))\tag{2.1.27}$$

$F^*(g)\stackrel{\Delta}{=}g\circ F$,其中 $g\in C^\infty(N;R)$, F^* 叫协变张量场间的拉回映射,当 $s=1$ 时,就是余切向量场间的拉回映射,易得 $F^*(\omega)$是 M 上的s 阶协变张量场.

易证 F^*具有以下性质

定理 2.1.3 F^*是线性映射,即

(1) $F^*(\alpha\omega+\beta\theta)=\alpha F^*(\omega)+\beta F^*(\theta)$

(2) $F^*(g_1\omega+g_2\theta)=(g_1\circ F)F^*(\omega)+(g_2\circ F)F^*(\theta)$

其中 $\alpha,\beta\in R$; $g_1,g_2\in C^\infty(N;R)$; $\omega,\theta\in C^\infty(N;T_s(N))$.

定理 2.1.4 设 $\omega\in C^\infty(N;T_r(N))$, $\theta\in C^\infty(N;T_s(N))$, 则

$$F^*(\omega\otimes\theta)=F^*(\omega)\otimes F^*(\theta)\tag{2.1.28}$$

即 F^*保张量积.

定理 2.1.5 设 $F:M^m\to(N^n,\tilde{g})$是从微分流形 M^m 到黎曼流形$(N^n,\tilde{g})$间的浸入映射,则 $g=F^*\tilde{g}$ 是M^n 上的黎曼度量,从而(M^m,g)是$(N^n,\tilde{g})$的黎曼浸入子流形,g 称为由$\tilde{g}$ 诱导的度量.

证明:设(V,φ,x_i)和(W,ψ,y_i)分别是 M^m 和 N^n 对应的坐标系,$i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,n$. 那么

$$\tilde{g} = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}_{ij} \mathrm{d}y_i \otimes \mathrm{d}y_j$$

其中 $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \in C^{\infty}(W;R)$. 因拉回映射 F^* 保张量积，并且张量积$\otimes$是双线性的，所以有

$$\begin{aligned}
g = F^* \tilde{g} &= \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}_{ij} \circ F \cdot F^*(\mathrm{d}y_i) \otimes F^*(\mathrm{d}y_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}_{ij} \circ F \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k \otimes \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_l} \mathrm{d}x_l \\
&= \sum_{k,l=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{g}_{ij} \circ F) \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial x_k} \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_l} \mathrm{d}x_k \otimes \mathrm{d}x_l
\end{aligned}$$

所以 g 是 M^m 上的二阶协变张量场，并且由

$$g_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{g}_{ij} \circ F) \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial x_k} \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_l} = g_{lk}$$

知，g 是对称的. 因为 $\tilde{g}$ 是正定的，所以对任 $p \in M$，

$$(F^* \tilde{g})_p(X_p, X_p) = \tilde{g}_{F(p)}(F_{*p}(X_p), F_{*p}(X_p)) \geqslant 0$$

等号成立的充要条件是 $F_{*p}(X_p) = 0 = F_{*p}(0)$，因 F 是浸入，所以 F_{*p}是单射，故 $X_p = 0$，因此 $g = F^* \tilde{g}$ 是正定的，故 g 是M^m 上的黎曼度量.

注 当 $F = I: M \to N$ 是包含映射，即 $F(x) = x$，任 $x \in M$ 成立，那么 $g = I^* \tilde{g} = \tilde{g}$.

例 1 设 $F: M^2 \to R^3$ 是 R^3 中的 C^{∞}曲面，其方程为$F(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$，$(u,v)$是 M^n 的坐标，M^2 的切向量场为

$$\frac{\partial}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right), \frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}\right)$$

R^3 中的黎曼度量为 $\tilde{g} = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2$，而

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial u} \mathrm{d}u + \frac{\partial x_i}{\partial v} \mathrm{d}v, \; i = 1,2,3$$

因此 M^2 上的诱导度量

$$g = F^*\tilde{g} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x_1}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x_2}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x_3}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^2$$

$$= \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2\right]\mathrm{d}u^2 + 2\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}v^2$$

$$= g_{11}\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g_{22}\mathrm{d}v^2$$

其中 $g_{11} = g\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right)$, $g_{12} = g\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)$, $g_{22} = g\left(\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right)$是 M^2 上的光滑函数.

设 $\sigma: u = u(t), v = v(t)$是曲面 M^2 上的任一曲线,那么 σ 的切向量场

$$T_\sigma = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial v}$$

与式(2.1.18)一致,所以 M^2 上的度量形式

$$\mathrm{d}s^2 = g(T_\sigma, T_\sigma)\mathrm{d}t^2$$

$$= g\left(\mathrm{d}u\frac{\partial}{\partial u} + \mathrm{d}v\frac{\partial}{\partial v}, \mathrm{d}u\frac{\partial}{\partial u} + \mathrm{d}v\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$= g\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right)\mathrm{d}u^2 + 2g\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g\left(\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right)\mathrm{d}v^2$$

$$= g_{11}\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g_{22}\mathrm{d}v^2.$$

曲线 σ 在$[a, b]$上的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2g_{12}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + g_{22}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

注 例 1 中的 $\tilde{g}$ 也可用张量积表示,$\tilde{g} = \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i$,那

么 $g = g_{11}\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + 2g_{12}\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v + g_{22}\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v$,在微分几何中,记 $E = g_{11}, F = g_{12}, G = g_{22}$.

例 2 设 $M = H^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 > 0\}$ 是双曲上半平面,因 $I: M \to R^2, I(x) = x$ 是恒等映射,R^2 中的黎曼度量 $\tilde{g} = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2$,从而 M 上的诱导度量 $g = I^* \tilde{g} = \tilde{g} = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2$,分量为 $g_{ij} = \delta_{ij}$. 现在在 M 上给出另一度量 —— 罗氏度量:

$$g_{ij} = \frac{1}{x_2^2}\delta_{ij}, \text{即 } g = \frac{1}{x_2^2}(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2)$$

或 $g(X, Y) = \dfrac{1}{x_2^2}\tilde{g}(X, Y)$,所以 M 上有两种不同的黎曼度量,从而 M 可成为两个不同的黎曼流形.

6. Riemann 度量 g 的存在性

定理 2.1.6 任何 C^∞ 微分流形 M^n 上总存在一个 Riemann 度量 g.

证明: 设 (V_i, φ_i) 是 M^n 的坐标覆盖,因坐标映射 $\varphi_i: V_i \to \varphi_i(V_i) \subset R^n$ 是同胚,而 R^n 上有欧氏度量 $\tilde{g}$,$\tilde{g} = \sum\limits_i \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i$,所以 V_i 上有诱导度量 $g_i = \varphi_i^* \tilde{g}$,设 $\{f_i\}$ 是坐标覆盖的单位分解,下面证明

$$g = \sum_i f_i g_i \tag{2.1.29}$$

是 M^n 上的 Riemann 度量,事实上,因为

$$\begin{aligned} g_p(X_p, Y_p) &= \sum_i f_i(p) g_{ip}(X_p, Y_p) \\ &= \sum_i f_i(p)(\varphi_i^* \tilde{g})_p(X_p, Y_p) \\ &= \sum_i f_i(p)\tilde{g}_{\varphi_i(p)}(\varphi_{i*p}(X_p), \varphi_{i*p}(Y_p)) \end{aligned}$$

显然 g_p 是双线性映射,且 $g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$,再证 g_p 是正定的:

因任 $p \in M, 0 \leqslant f_i(p) \leqslant 1$,且 $\tilde{g}_{\varphi_i(p)}(\varphi_{i*p}(X_p), \varphi_{i*p}(X_p))$

$\geqslant 0$，所以 $g_p(X_p,X_p) = \sum_i f_i(p)\tilde{g}_{\varphi_i(p)}(\varphi_{i*p}(X_p),\varphi_{i*p}(X_p))$ $\geqslant 0$，且 $g_p(X_p,X_p)=0$ 的充要条件是

$$f_i(p)\tilde{g}_{\varphi_i(p)}(\varphi_{i*p}(X_p),\varphi_{i*p}(X_p)) = 0,\ i = 1,2,\cdots$$

由于 $\sum_i f_i(p) = 1$，所以存在 j，使得 $f_j(p) > 0$，从而

$$\tilde{g}_{\varphi_j(p)}(\varphi_{j*p}(X_p),\varphi_{j*p}(X_p)) = 0$$

由于 $\tilde{g}$ 是 R^n 中的正定内积，并且 φ_{j*p} 是单射，故有 $X_p = 0$. 所以式(2.1.29) 给出了 M^n 上的黎曼度量.

2.2 Riemann 联络

1. Riemann 联络的定义及性质

定义 2.2.1 Riemann 流形 (M^n,g) 上的线性联络 ∇，如果再满足

(1) 挠率张量场 $T = 0$，即

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \tag{2.2.1}$$

(2) 度量相容的，即

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \tag{2.2.2}$$

则称 ∇ 为 (M^n,g) 上的 Riemann 联络. 满足式(2.2.2) 的线性联络 ∇ 叫 (M^n,g) 的度量联络.

由式(1.6.12) 知，式(2.2.2) 等价于

$$(\nabla_Z g)(X,Y) = \nabla_Z g(X,Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0 \tag{2.2.3}$$

或任 $Z \in C^\infty(M;T(M))$，有 $\nabla_Z g = 0$.

定理 2.2.1 设 ∇ 是 (M^n,g) 上的线性联络，则 ∇ 是度量联络的充要条件是：对任一坐标系 (V,φ,x_i) 及 V 上的任意向量场 $X_1,\cdots,X_n \in C^\infty(V;T(V))$，有

$$\mathrm{d}g_{ij} = \sum_k (\omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki}) \tag{2.2.4}$$

或

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \sum_l (g_{lj}\Gamma_{ki}^l + g_{il}\Gamma_{kj}^l) \tag{2.2.5}$$

其中 $g_{ij} = g(X_i, X_j)\left(或\ g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)$, $\nabla_{X_i}X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, $\omega_i^j = \sum_k \Gamma_{ki}^j \omega^k$.

证明: ∇ 是度量联络,即式(2.2.2) 成立,特别,对任 V,及 $X_1, \cdots, X_n \in C^\infty(V; T(V))$,有

$$X_k g(X_i, X_j) = g(\nabla_{X_k}X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_{X_k}X_j) \tag{1}$$

反之,若式(1) 成立,那么对 $X = \sum_i \alpha^i X_i$, $Y = \sum_j \beta^j X_j$,因 ∇ 是线性联络,所以有

$$\begin{aligned}
X_k g(X, Y) &= X_k g\left(\sum_i \alpha^i X_i, \sum_j \beta^j X_j\right) \\
&= \sum_{i,j} X_k \{\alpha^i \beta^j g(X_i, X_j)\} \\
&= \sum_{i,j} [\alpha^i \beta^j X_k g(X_i, X_j) + (X_k \alpha^i)\beta^j g(X_i, X_j) \\
&\quad + \alpha^i (X_k \beta^j) g(X_i, X_j)] \\
&= \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j [g(\nabla_{X_k}X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_{X_k}X_j)] \\
&\quad + \sum_i (X_k \alpha^i) g(X_i, Y) + \sum_j (X_k \beta^j) g(X, X_j) \\
&= \sum_i \alpha^i g(\nabla_{X_k}X_i, Y) + \sum_j \beta^j g(X, \nabla_{X_k}X_j) \\
&\quad + \sum_i (X_k \alpha^i) g(X_i, Y) + \sum_j (X_k \beta^j) g(X, X_j) \\
&= g\left(\sum_i (X_k \alpha^i) X_i + \sum_i \alpha^i \nabla_{X_k}X_i, Y\right) \\
&\quad + g\left(X, \sum_j (X_k \beta^j) X_j + \sum_j \beta^j \nabla_{X_k}X_j\right) \\
&= g(\nabla_{X_k}X, Y) + g(X, \nabla_{X_k}Y)
\end{aligned}$$

从而对 $Z = \sum_k r^k X_k$,有 $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$.

故式(1)是度量联络的充要条件，又 $\nabla_{X_k}X_i = \sum_l \Gamma_{ki}^l X_l$，所以式(1)等价于

$$X_k g_{ij} = \sum_l (\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{li}) \tag{2}$$

式(2)两边同乘以 ω^k，并对 k 求和，并且由 $\mathrm{d}g_{ij} = \sum_k (X_k g_{ij})\omega^k$ 得

$$\mathrm{d}g_{ij} = \sum_l (\omega_i^l g_{lj} + \omega_j^l g_{li})$$

对坐标切向量场$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$，式(2)就是式(2.2.5)，并且 $\mathrm{d}g_{ij} = \sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k$，$\omega_i^l = \sum_k \Gamma_{ki}^l \mathrm{d}x_k$.

注 当 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 时，式(2.2.4)为 $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$，又因为 $DX_i = \sum_k \omega_i^k \otimes X_k$，所以式(2.2.4)等价于

$$\mathrm{d}g_{ij} = g(DX_i, X_j) + g(X_i, DX_j) \tag{2.2.6}$$

下面要用到切向量场沿曲线平行的概念，为此我们给出以下定义：

定义 2.2.2 设 σ 是微分流形 M^n 中的 C^∞ 曲线，T_σ 是曲线 σ 的切向量场，Y_σ 是沿曲线的向量场，若

$$\nabla_{T_\sigma} Y_\sigma = 0 \quad (\text{或 } DY_\sigma = 0) \tag{2.2.7}$$

则称向量场 Y_σ 沿曲线 σ 是平行的.

局部(V,φ,x_i)上，T_σ 和 Y_σ 的坐标表示如下：

$$T_\sigma = \sum_i \frac{\mathrm{d}(x_i \circ \sigma)}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_\sigma, \quad Y_\sigma = \sum_j Y^j \circ \sigma \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_\sigma$$

所以有

$$\nabla_{T_\sigma} Y_\sigma = \sum_k \left[\frac{\mathrm{d}(Y^k \circ \sigma)}{\mathrm{d}t} + \sum_{i,j} \frac{\mathrm{d}(x_i \circ \sigma)}{\mathrm{d}t} \cdot Y^j \circ \sigma \cdot \Gamma_{ij}^k\right] \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_\sigma$$

因此可得，Y_σ 沿曲线 σ 平行的充要条件是

$$\frac{\mathrm{d}Y^k}{\mathrm{d}t} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \cdot Y^j = 0,\ k = 1,\cdots,n \tag{2.2.8}$$

方程组式(2.2.8)是以 $Y^1,\cdots,Y^n$ 为变量的常微分方程组.

注 式(2.2.8)中,$x_i \triangleq x_i \circ \sigma$, $Y^k = Y^k \circ \sigma$,它们都是 t 的函数,并且 $\frac{\mathrm{d}(Y^k \circ \sigma)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial (Y^k \circ \sigma)}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}(x_i \circ \sigma)}{\mathrm{d}t}$.

定义 2.2.3 设 σ 是微分流形 M^n 上的曲线,T_σ 是 σ 的切向量场,若 T_σ 沿曲线 σ 平行,即

$$\nabla_{T_\sigma} T_\sigma = 0 \quad (\text{或 } DT_\sigma = 0) \tag{2.2.9}$$

则称 σ 为 M^n 上的一条测地线(或短程线).

由上易见,M^n 上的测地线的微分方程组是

$$\frac{\mathrm{d}^2(x_k \circ \sigma)}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}(x_i \circ \sigma)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}(x_j \circ \sigma)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.2.10}$$

$k = 1, \cdots, n$. 当 $n = 2$ 时,式(2.2.10)就是古典微分几何中曲面上测地线的微分方程组.

注 1 对于平坦欧氏空间 R^n,因 $\Gamma_{ij}^k = 0$,所以式(2.2.10)为 $\frac{\mathrm{d}^2(x_k \circ \sigma)}{\mathrm{d}t^2} = 0$,积分得

$$x_k \circ \sigma = a_k t + b_k, \ k = 1, \cdots, n$$

即 $\sigma(t) = (a_1 t + b_1, \cdots, a_n t + b_n) = (a_1, \cdots, a_n)t + (b_1, \cdots, b_n) = at + b$,所以 R^n 中的测地线是直线.

注 2 因为 $Y_\sigma = \sum_k Y^k \circ \sigma \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_\sigma$,所以

$$DY_\sigma = \sum_k D(Y^k \circ \sigma) \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_\sigma$$

其中 $D(Y^k \circ \sigma) = \mathrm{d}(Y^k \circ \sigma) + \sum_{i,j} Y^j \circ \sigma \cdot \Gamma_{ij}^k \cdot \mathrm{d}(x_i \circ \sigma)$,所以 $\nabla_{T_\sigma} Y_\sigma = 0 \Leftrightarrow D(Y^k \circ \sigma) = 0 \Leftrightarrow DY_\sigma = 0$.

定理 2.2.2 设 ∇ 是 Riemann 流形 (M^n, g) 上的线性联络,则 ∇ 是度量联络的充要条件是:平行移动下保持内积不变,即对任意曲线 $\sigma(t)$ 及沿曲线的向量场 X_σ 和 Y_σ,有

$g(X_\sigma, Y_\sigma) = \text{const}$,或 $g_{\sigma(t_1)}(X_{\sigma(t_1)}, Y_{\sigma(t_1)}) = g_{\sigma(t_2)}(X_{\sigma(t_2)}, Y_{\sigma(t_2)})$.

证明:局部(V,φ,x_i)上,因为 $X_\sigma = \sum_i X^i\circ\sigma\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_\sigma$,

$$Y_\sigma = \sum_j Y^j\circ\sigma\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_\sigma,\ T_\sigma = \sum_k \frac{\mathrm{d}(x_k\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_\sigma$$

如果 X_σ 和 Y_σ 沿曲线σ平行,由式(2.2.8)得

$$\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}t} + \sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}X^k = 0,\ \frac{\mathrm{d}Y^i}{\mathrm{d}t} + \sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}Y^k = 0$$

$i = 1,\cdots,n$. 从而 $g(X_\sigma,Y_\sigma) = \mathrm{const}$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(X_\sigma,Y_\sigma)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g\left(\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_\sigma,\ \sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_\sigma\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i,j}g_{ij}X^iY^j\right)\\
&= \sum_{i,j}\frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}t}X^iY^j + \sum_{i,j}g_{ij}\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}t}Y^j + \sum_{i,j}g^{ij}\frac{\mathrm{d}Y^j}{\mathrm{d}t}X^i\\
&= \sum_{i,j}\left(\frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}t} - \sum_{k,l}\Gamma^l_{ki}g_{lj}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} - \sum_{k,l}\Gamma^l_{kj}g_{li}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\right)X^iY^j
\end{aligned}$$

又因为 X_σ 和 Y_σ 可取任意值,所以上式等价于

$$\mathrm{d}g_{ij} = \sum_{k,l}(\Gamma^l_{ki}g_{lj} + \Gamma^l_{kj}g_{li})\mathrm{d}x_k = \sum_l(\omega^l_ig_{lj} + \omega^l_jg_{li}).$$

2. Riemann 流形(M^n,g)的基本定理

定理 2.2.3 设(M^n,g)是 Riemann 流形,则在 M^n 上存在惟一的 Riemann 联络 ∇.

证明:先证惟一性:设(M,g)上有 Riemann 联络 ∇,则

$$\begin{aligned}
&Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y)\\
&= g(\nabla_XY,Z) + g(Y,\nabla_XZ) + g(\nabla_YZ,X) + g(Z,\nabla_YX)\\
&\quad - g(\nabla_ZX,Y) - g(X,\nabla_ZY)\\
&= g(\nabla_XY,Z) + g(Y,[X,Z]) + g(X,[Y,Z])\\
&\quad + g(Z,\nabla_XY - [X,Y])
\end{aligned}$$

从而得

$$2g(\nabla_X Y,Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y)$$
$$- g(Y,[X,Z]) - g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y]) \tag{2.2.11}$$

若 $\bar{\nabla}$ 是(M^n,g)上的另一 Riemann 联络,由度量 g 的惟一性及式(2.2.11)得

$$g(\nabla_X Y,Z) = g(\bar{\nabla}_X Y,Z)$$

由向量场 Z 的任意性得 $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y$,即 $\bar{\nabla} = \nabla$.

再证存在性,对任意 Z,用(2.2.11)式来定义 $\nabla_X Y$,则

(1) $2g(\nabla_X(f_1Y_1 + f_2Y_2),Z)$

$$\begin{aligned}
&= Xg(f_1Y_1 + f_2Y_2,Z) + (f_1Y_1 + f_2Y_2)g(Z,X) \\
&\quad - Zg(X,f_1Y_1 + f_2Y_2) - g(f_1Y_1 + f_2Y_2,[X,Z]) \\
&\quad - g(X,[f_1Y_1 + f_2Y_2,Z]) + g(Z,[X,f_1Y_1 + f_2Y_2]) \\
&= (Xf_1)g(Y_1,Z) + f_1Xg(Y_1,Z) + (Xf_2)g(Y_2,Z) \\
&\quad + f_2Xg(Y_2,Z) + f_1Y_1g(Z,X) + f_2Y_2g(Z,X) \\
&\quad - (Zf_1)g(X,Y_1) - f_1Zg(X,Y_1) - (Zf_2)g(X,Y_2) \\
&\quad - f_2Zg(X,Y_2) - f_1g(Y_1,[X,Z]) - f_2g(Y_2,[X,Z]) \\
&\quad - f_1g(X,[Y_1,Z]) + (Zf_1)g(X,Y_1) - f_2g(X,[Y_2,Z]) \\
&\quad + (Zf_2)g(X,Y_2) + f_1g(Z,[X,Y_1]) + (Xf_1)g(Z,Y_1) \\
&\quad + f_2g(Z,[X,Y_2]) + (Xf_2)g(Z,Y_2) \\
&= 2g((Xf_1)Y_1 + (Xf_2)Y_2,Z) \\
&\quad + 2f_1g(\nabla_X Y_1,Z) + 2f_2g(\nabla_X Y_2,Z) \\
&= 2g((Xf_1)Y_1 + f\nabla_X Y_1 + (Xf_2)Y_2 + f_2\nabla_X Y_2,Z)
\end{aligned}$$

又 Z 任意,所以有

$$\nabla_X(f_1Y_1 + f_2Y_2) = (Xf_1)Y_1 + f_1\nabla_X Y_1 + (Xf_2)Y_2 + f\nabla_X Y_2$$

(2) 同(1)的计算(练习)得

$$g(\nabla_{(f_1X_1+f_2X_2)}Y,Z) = g(f_1\nabla_{X_1}Y + f_2\nabla_{X_2}Y,Z)$$

所以 $\nabla_{(f_1X_1+f_2X_2)}Y = f_1\nabla_{X_1}Y + f_2\nabla_{X_2}Y$

(3) 由于

$$
\begin{aligned}
&2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],Z)\\
&= 2g(\nabla_X Y,Z) - 2g(\nabla_Y X,Z) - 2g([X,Y],Z)\\
&= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(Y,[X,Z])\\
&\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y]) - Yg(X,Z)\\
&\quad - Xg(Z,Y) + Zg(Y,X) + g(X,[Y,Z])\\
&\quad + g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) - 2g([X,Y],Z)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

而 Z 是任意的,所以有 $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$.

(4) 由于

$$
\begin{aligned}
&2g(\nabla_Z X,Y) + 2g(X,\nabla_Z Y)\\
&= Zg(X,Y) + Xg(Y,Z) - Yg(Z,X) - g(X,[Z,Y])\\
&\quad - g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) + Zg(Y,X) + Yg(X,Z)\\
&\quad - Xg(Z,Y) - g(Y,[Z,X]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y])\\
&= 2Zg(X,Y)
\end{aligned}
$$

所以有 $Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X,Y) + g(X,\nabla_Z Y)$. 由(1)(2)(3)和(4)知, ∇ 是 (M^n,g) 上的 Riemann 联络.

由式(2.2.5)得 $g_{ij;k} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \sum\limits_l g_{lj}\Gamma^l_{ki} - \sum\limits_l g_{il}\Gamma^l_{kj} = 0$,即

$$
g_{ij;k} = 0 \tag{2.2.12}
$$

或

$$
\begin{aligned}
g_{ij;k} &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} g\right)_{ij} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} g\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

因 $g = \sum\limits_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j$ 是(0,2)型张量场, g 的绝对微分 Dg 是(0,3)型张量场,即

$$
Dg = \sum_{i,j} Dg_{ij} \otimes \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j = \sum_{i,j,k} g_{ij;k}\mathrm{d}x_k \otimes \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j
$$

所以线性联络 ∇ 是度量联络的充要条件是

$$g_{ij;k}=0\Leftrightarrow Dg_{ij}=0\Leftrightarrow Dg=0 \tag{2.2.13}$$

故黎曼流形$(M^n;g)$的基本度量张量场g在绝对微分D的作用下的状态如同一个常数.

由式(2.2.5)我们得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}=\sum_l(\Gamma^l_{ki}g_{lj}+\Gamma^l_{kj}g_{li}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}=\sum_l(\Gamma^l_{ij}g_{lk}+\Gamma^l_{ik}g_{lj}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}=\sum_l(\Gamma^l_{jk}g_{li}+\Gamma^l_{ji}g_{lk}) \tag{3}$$

式(2) + 式(3) − 式(1)可得

$$\sum_l\Gamma^l_{ij}g_{lk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) \tag{2.2.14}$$

设(g^{ij})是(g_{ij})的逆矩阵,即$\sum\limits_j g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$,在式(2.2.14)两边乘以$g^{mk}$,并对$k$求和得

$$\Gamma^m_{ij}=\frac{1}{2}\sum_k g^{mk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) \tag{2.2.15}$$

式(2.2.15)就是用 Riemann 度量g_{ij}来求联络系数Γ^m_{ij}的公式.

注 当$X=\frac{\partial}{\partial x_i},Y=\frac{\partial}{\partial x_j},Z=\frac{\partial}{\partial x_k}$时,式(2.2.11)就是式(2.2.14).

例 1 在双曲上半平面$H^2=\{x=(x_1,x_2)\mid x_2>0\}$上,给定度量

$$g_{ij}=\frac{1}{x_2^2}\delta_{ij} \tag{2.2.16}$$

求H^2的联络系数Γ^k_{ij}.

解:因为$g_{11}=g_{22}=\frac{1}{x_2^2},g_{12}=g_{21}=0$,所以$g^{11}=g^{22}=x_2^2$,$g^{12}=g^{21}=0$,由式(2.2.15)得

$$\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{11} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_2^2 \cdot (-2) x_2^{-3} = -\frac{1}{x_2}.$$

同理 $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{x_2}, \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{x_2}, \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0.$

2.3 Riemann 曲率张量场 R

1. Riemann 曲率张量场 R 的定义及表达式

定义 2.3.1 设 ∇是 Riemann 流形(M^n, g)的 Riemann 联络，映射 $R: \underbrace{C^\infty(M;T(M)) \times \cdots \times C^\infty(M;T(M))}_{4\text{个}} \to C^\infty(M;R)$

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) \stackrel{\Delta}{=\!=} g(X_1, R(X_3, X_4)X_2) \quad (2.3.1)$$

我们称 R 为 Riemann 联络 ∇ 的曲率张量场.

注 显然 R 是 $C^\infty(M;R)$上的 4 重线性映射，即对任 f_1, $f_2 \in C^\infty(M;R)$，有

$$\begin{aligned} & R(f_1 X_1 + f_2 \widetilde{X}_1, X_2, X_3, X_4) \\ & \quad = f_1 R(X_1, X_2, X_3, X_4) + f_2 R(\bar{X}_1, X_2, X_3, X_4) \end{aligned}$$

等，故 R 是 M 上的(0,4) 型张量场.

定理 2.3.1 设 V 是M^n 的局部坐标域，$X_1, \cdots, X_n$ 是 V 上的基向量场，$R(X_j, X_k)X_i = \sum_l R_{ijk}^l X_l, R_{ijkl} = R(X_i, X_j, X_k, X_l)$，则(1,3) 型张量场的分量 R_{ijk}^l 与(0,4) 型张量场的分量 R_{ijkl} 的关系为

$$R_{ijkl} = \sum_s R_{jkl}^s g_{si}, \ R_{jkl}^i = \sum_s R_{sjkl} g^{si} \quad (2.3.2)$$

其中 $g_{ij} = g(X_i, X_j) \in C^\infty(V;R)$，$(g^{ij})$ 是(g_{ij}) 的逆矩阵.

证明：由定义得

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= R(X_i, X_j, X_k, X_l) = g(X_i, R(X_k, X_l)X_j) \\ &= g(X_i, \sum_s R_{jkl}^s X_s) = \sum_s R_{jkl}^s g_{si} \end{aligned}$$

由于(g^{ij}) 是(g_{ij}) 的逆，所以 $\sum_s g_{ms} g^{si} = \delta_m^i$，从而

$$R^i_{jkl} = \sum_m R^m_{jkl}\delta^i_m = \sum_m R^m_{jkl}\sum_s g_{ms}g^{si}$$
$$= \sum_s\left(\sum_m R^m_{jkl}g_{ms}\right)g^{si} = \sum_s R_{sjkl}g^{si}.$$

注 当 $X_i = e_i, i = 1,\cdots,n$ 是 V 上的标准正交切标架场时，$g_{ij} = g(e_i,e_j) = \delta_{ij}$，从而得

$$R^i_{jkl} = R_{ijkl} \tag{2.3.3}$$

设 $X = \sum_i X^iX_i, Y = \sum_j Y^jX_j, Z = \sum_k Z^kX_k, W = \sum_l w^lX_l$，那么有

$$R(X,Y,Z,W) = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}X^iY^jZ^kw^l \tag{2.3.4}$$

定理 2.3.2 设 (V,φ,x_i) 和 (W,ψ,y_i) 是 (M^n,g) 上 p 点的两个坐标系.

$$R_{ijkl} = R\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_l}\right), \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha},\frac{\partial}{\partial y_\beta},\frac{\partial}{\partial y_\gamma},\frac{\partial}{\partial y_\delta}\right).$$

则 R_{ijkl} 与 $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 之间的关系是

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{i,j,k,l}\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x_j}{\partial y_\beta}\frac{\partial x_k}{\partial y_\gamma}\frac{\partial x_l}{\partial y_\delta}R_{ijkl} \tag{2.3.5}$$

从而 R_{ijkl} 适合(0,4) 型张量场分量的变换公式，所以

$$R = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_j\otimes\mathrm{d}x_k\otimes\mathrm{d}x_l \tag{2.3.6}$$

是(0,4) 型黎曼曲率张量场 R 在局部 (V,φ,x_i) 上的表示式.

证明：因为 $\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_i\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i}$，并且 R 是线性的，所以

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= R\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha},\frac{\partial}{\partial y_\beta},\frac{\partial}{\partial y_\gamma},\frac{\partial}{\partial y_\delta}\right)\\ &= R\left(\sum_i\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i},\sum_j\frac{\partial x_j}{\partial y_\beta}\frac{\partial}{\partial x_j},\sum_k\frac{\partial x_k}{\partial y_\gamma}\frac{\partial}{\partial x_k},\sum_l\frac{\partial x_l}{\partial y_\delta}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\\ &= \sum_{i,j,k,l}\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x_j}{\partial y_\beta}\frac{\partial x_k}{\partial y_\gamma}\frac{\partial x_l}{\partial y_\delta}R_{ijkl}\end{aligned}$$

2. 曲率张量场的性质

线性联络的曲率张量场 R 是(1,3) 型张量场，黎曼联络的曲

率张量场 R 是(0,4)型张量场,尽管用同一字母表示,但从它们的作用上很容易判别.

定理 2.3.3 设 ∇ 是微分流形 M^n 上的线性联络,则第一 Bianchi 恒等式的整体表示式为

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\
&= (\nabla_X T)(Y,Z) + (\nabla_Y T)(Z,X) + (\nabla_Z T)(X,Y) \\
&\quad + T(T(X,Y),Z) + T(T(Y,Z),X) + T(T(Z,X),Y)
\end{aligned}
\tag{2.3.7}
$$

其中 T 是挠率张量场,特别 ∇ 无挠时,$T=0$,上式为

$$
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \tag{2.3.8}
$$

证明:因为 T 是(1,2)型张量场,由式(1.6.12)得向量场的等式:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X T)(Y,Z) &= \nabla_X T(Y,Z) - T(\nabla_X Y,Z) - T(Y,\nabla_X Z),\\
(\nabla_Y T)(Z,X) &= \nabla_Y T(Z,X) - T(\nabla_Y Z,X) - T(Z,\nabla_Y X),\\
(\nabla_Z T)(X,Y) &= \nabla_Z T(X,Y) - T(\nabla_Z X,Y) - T(X,\nabla_Z Y).
\end{aligned}
$$

又因为 $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ 及 T 线性和 $T(X,Y) = -T(Y,X)$,得

$$
\begin{aligned}
T(T(X,Y),Z) &= T(\nabla_X Y,Z) + T(Z,\nabla_Y X) - T([X,Y],Z),\\
T(T(Y,Z),X) &= T(\nabla_Y Z,X) + T(X,\nabla_Z Y) - T([Y,Z],X),\\
T(T(Z,X),Y) &= T(\nabla_Z X,Y) + T(Y,\nabla_X Z) - T([Z,X],Y).
\end{aligned}
$$

所以上面六个式子的和就是式(2.3.7)的右面,故式(2.3.7)的右面为

$$
\begin{aligned}
&\nabla_X T(Y,Z) + \nabla_Y T(Z,X) + \nabla_Z T(X,Y) - T([X,Y],Z) \\
&\qquad - T([Y,Z],X) - T([Z,X],Y)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

而式(2.3.7)的左面为

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_Z\nabla_X Y \\
&\quad - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
=& \nabla_X(T(Y,Z) + [Y,Z]) + \nabla_Y(T(Z,X) + [Z,X]) \\
&- \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Z(T(X,Y) + [X,Y]) - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
=& \nabla_X T(Y,Z) + \nabla_Y T(Z,X) + \nabla_Z T(X,Y) + \nabla_X[Y,Z] \\
&+ \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&- \nabla_{[Z,X]}Y + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] + [[X,Y],Z] \\
=& \nabla_X T(Y,Z) + \nabla_Y T(Z,X) + \nabla_Z T(X,Y) - T([Y,Z],X) \\
&- T([Z,X],Y) - T([X,Y],Z) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

由于(1)式和(2)式相等,所以式(2.3.7)成立.

定理 2.3.4 设 ∇是微分流形 M^n 上的线性联络,则第一 Bianchi 恒等式的局部表示式为

$$
\begin{aligned}
&R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} \\
=& T^i_{jk;l} + T^i_{kl;j} + T^i_{lj;k} + \sum_s (T^s_{jk}T^i_{sl} + T^s_{kl}T^i_{sj} + T^s_{lj}T^i_{sk}) \qquad (2.3.9)
\end{aligned}
$$

特别 ∇是无挠线性联络时,$T^k_{ij}=0$,从而 $T^k_{ij;l}=0$,故式(2.3.9)为

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0 \qquad (2.3.10)$$

证法 1:在局部(V,φ,x_i)上,取一般基向量场 $X_1,\cdots,X_n$,对偶为 $\omega^1,\cdots,\omega^n$,那么挠率张量场 T 为

$$T = \sum_{i,k,l} T^i_{kl} X_i \otimes \omega^k \otimes \omega^l,$$

$$\nabla_{X_j} T = \sum_{i,k,l} T^i_{kl;j} X_i \otimes \omega^k \otimes \omega^l, (\nabla_{X_j}T)(X_k,X_l) = \sum_i T^i_{kl;j} X_i.$$

又 $T(X_j,X_k) = \sum_s T^s_{jk} X_s, R(X_k,X_l)X_j = \sum_i R^i_{jkl} X_i$,在式(2.3.7)中取 $Z = X_j, X = X_k, Y = X_l$,我们得

$$
\begin{aligned}
&\sum_i (R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk}) X_i \\
=& R(X_k,X_l)X_j + R(X_l,X_j)X_k + R(X_j,X_k)X_l \\
=& (\nabla_{X_j}T)(X_k,X_l) + (\nabla_{X_k}T)(X_l,X_j) + (\nabla_{X_l}T)(X_j,X_k) \\
&+ T(T(X_j,X_k),X_l) + T(T(X_k,X_l),X_j) + T(T(X_l,X_j),X_k) \\
=& \sum_i (T^i_{kl;j} + T^i_{lj;k} + T^i_{jk;l}) X_i + T(\sum_s T^s_{jk} X_s, X_l)
\end{aligned}
$$

$$+ T(\sum_s T_{kl}^s X_s, X_j) + T(\sum_s T_{lj}^s X_s, X_k)$$

$$= \sum_s (T_{kl;j}^i + T_{lj;k}^i + T_{jk;l}^i) X_i$$

$$+ \sum_i \sum_s (T_{jk}^s T_{sl}^i + T_{kl}^s T_{sj}^i + T_{lj}^s T_{sk}^i) X_i$$

比较两边可得式(2.3.9).

证法 2: 取 $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$,因为

$\left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}, \dfrac{\partial}{\partial x_k}\right] = 0$,得 $C_{jk}^s = 0$,又 $T_{sl}^i = -T_{ls}^i, T_{jk}^s = \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{kj}^s$,

从而有

$$\sum_s T_{jk}^s T_{sl}^i = \sum_s (\Gamma_{jk}^s T_{sl}^i + \Gamma_{kj}^s T_{ls}^i),$$

$$\sum_s T_{kl}^s T_{sj}^i = \sum_s (\Gamma_{kl}^s T_{sj}^i + \Gamma_{lk}^s T_{js}^i),$$

$$\sum_s T_{lj}^s T_{sk}^i = \sum_s (\Gamma_{lj}^s T_{sk}^i + \Gamma_{jl}^s T_{ks}^i).$$

又由 T_{jk}^i 的一阶协变导数的计算公式得

$$T_{jk;l}^i = \frac{\partial T_{jk}^i}{\partial x_l} + \sum_s (T_{jk}^s \Gamma_{ls}^i - T_{sk}^i \Gamma_{lj}^s - T_{js}^i \Gamma_{lk}^s),$$

$$T_{kl;j}^i = \frac{\partial T_{kl}^i}{\partial x_j} + \sum_s (T_{kl}^s \Gamma_{js}^i - T_{sl}^i \Gamma_{jk}^s - T_{ks}^i \Gamma_{jl}^s),$$

$$T_{lj;k}^i = \frac{\partial T_{lj}^i}{\partial x_k} + \sum_s (T_{lj}^s \Gamma_{ks}^i - T_{sj}^i \Gamma_{kl}^s - T_{ls}^i \Gamma_{kj}^s).$$

上面六个等式相加得

$$T_{jk;l}^i + T_{kl;j}^i + T_{lj;k}^i + \sum_s (T_{jk}^s T_{sl}^i + T_{kl}^s T_{sj}^i + T_{lj}^s T_{sk}^i)$$

$$= \frac{\partial T_{jk}^i}{\partial x_l} + \frac{\partial T_{kl}^i}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{lj}^i}{\partial x_k} + \sum_s (T_{jk}^s \Gamma_{ls}^i + T_{kl}^s \Gamma_{js}^i + T_{lj}^s \Gamma_{ks}^i)$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x_l} + \sum_s (\Gamma_{jk}^s \Gamma_{ls}^i - \Gamma_{kj}^s \Gamma_{ls}^i)$$

$$+ \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{lk}^i}{\partial x_j} + \sum_s (\Gamma_{kl}^s \Gamma_{js}^i - \Gamma_{lk}^s \Gamma_{js}^i)$$

$$+\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x_k}-\frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x_k}+\sum_s(\Gamma_{lj}^s\Gamma_{ks}^i-\Gamma_{jl}^s\Gamma_{ks}^i)$$

$$=R_{jkl}^i+R_{klj}^i+R_{ljk}^i.$$

类似于定理 2.3.3 的证明,我们有

定理 2.3.5 设 ∇是微分流形 M^n 上的线性联络,则第二 Bianchi 恒等式的整体表示式与局部表示式如下:

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W+(\nabla_Y R)(Z,X)W+(\nabla_Z R)(X,Y)W$$
$$+R(T(X,Y),Z)W+R(T(Y,Z),X)W+$$
$$R(T(Z,X),Y)W=0 \tag{2.3.11}$$

当 ∇ 无挠时,$T=0$,式(2.3.11)为

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W+(\nabla_Y R)(Z,X)W+(\nabla_Z R)(X,Y)W=0 \tag{2.3.12}$$

局部(V,φ,x_i)上,式(2.3.11)和式(2.3.12)分别为

$$R_{jkl;h}^i+R_{jlh;k}^i+R_{jhk;l}^i$$
$$=-\sum_s(T_{kl}^s R_{jsh}^i+T_{lh}^s R_{jsk}^i+T_{hk}^s R_{jsl}^i) \tag{2.3.13}$$

$$R_{jkl;h}^i+R_{jlh;k}^i+R_{jhk;l}^i=0 \tag{2.3.14}$$

下面我们给出黎曼流形(M^n,g)上的第一、二 Bianchi 恒等式及曲率算子的性质.

定理 2.3.6 设 ∇是黎曼流形(M^n,g)上的黎曼联络$(T=0)$,则第一 Bianchi 恒等式为

$$R(X_1,X_2)X_3+R(X_2,X_3)X_1+R(X_3,X_1)X_2=0 \tag{2.3.15}$$

此处 R 是(1,3)型张量场,它是向量场的等式,它等价于

$$R(X_1,X_2,X_3,X_4)+R(X_1,X_3,X_4,X_2)$$
$$+R(X_1,X_4,X_2,X_3)=0 \tag{2.3.16}$$

此处 R 是(0,4)型张量场,它是函数的等式.

局部(V,x_i)上,式(2.3.15)和式(2.3.16)分别为

$$R_{jkl}^i+R_{klj}^i+R_{ljk}^i=0 \tag{2.3.17}$$

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 \qquad (2.3.18)$$

证明: 由定理 2.3.3 得证,或因无挠,$T=0$,即 $\nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1 = [X_1, X_2]$,从而

$$\begin{aligned}
&R(X_1,X_2)X_3 + R(X_2,X_3)X_1 + R(X_3,X_1)X_2 \\
&= \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 - \nabla_{[X_1,X_2]} X_3 + \nabla_{X_2} \nabla_{X_3} X_1 - \nabla_{X_3} \nabla_{X_2} X_1 \\
&\quad - \nabla_{[X_2,X_3]} X_1 + \nabla_{X_3} \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_1} \nabla_{X_3} X_2 - \nabla_{[X_3,X_1]} X_2 \\
&= \nabla_{X_1}(\nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_3} X_2) + \nabla_{X_2}(\nabla_{X_3} X_1 - \nabla_{X_1} X_3) - \nabla_{[X_1,X_2]} X_3 \\
&\quad + \nabla_{X_3}(\nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1) - \nabla_{[X_2,X_3]} X_1 - \nabla_{[X_3,X_1]} X_2 \\
&= \nabla_{X_1}[X_2,X_3] + \nabla_{X_2}[X_3,X_1] - \nabla_{[X_1,X_2]} X_3 \\
&\quad + \nabla_{X_3}[X_1,X_2] - \nabla_{[X_2,X_3]} X_1 - \nabla_{[X_3,X_1]} X_2 \\
&= [X_1,[X_2,X_3]] + [X_2,[X_3,X_1]] + [X_3,[X_1,X_2]] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
&R(X_1,X_2,X_3,X_4) + R(X_1,X_3,X_4,X_2) + R(X_1,X_4,X_2,X_3) \\
&= g(X_1, R(X_3,X_4)X_2) + g(X_1, R(X_4,X_2)X_3) \\
&\quad + g(X_1, R(X_2,X_3)X_4) \\
&= g(X, R(X_2,X_3)X_4 + R(X_3,X_4)X_2 + R(X_4,X_2)X_3)
\end{aligned}$$

对任 $X_1 \in C^\infty(M; T(M))$ 成立,所以式(2.3.15)与式(2.3.16)等价,分量公式(2.3.17)和式(2.3.18)显然成立.

定理 2.3.7 设 ∇ 是黎曼流形 (M^n, g) 上的黎曼联络($T=0$).则第二 Bianchi 恒等式为

$$(\nabla_{X_1} R)(X_2,X_3)Y + (\nabla_{X_2} R)(X_3,X_1)Y + (\nabla_{X_3} R)(X_1,X_2)Y = 0 \qquad (2.3.19)$$

上式是向量场的等式,R 和 $(\nabla_{X_1} R)$ 都是 $(1,3)$ 型张量场,它等价于

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{X_1} R)(Y,Z,X_2,X_3) + (\nabla_{X_2} R)(Y,Z,X_3,X_1) \\
&\quad + (\nabla_{X_3} R)(Y,Z,X_1,X_2) = 0 \qquad (2.3.20)
\end{aligned}$$

此式是函数的等式，R 和($\nabla_{X_1}R$)都是(0,4)型张量场.

局部(V,x_i)上，式(2.3.19)和式(2.3.20)分别是

$$R^i_{jkl;h}+R^i_{jlh;k}+R^i_{jhk;l}=0 \tag{2.3.21}$$

$$R_{ijkl;h}+R_{ijlh;k}+R_{ijhk;l}=0 \tag{2.3.22}$$

证明:因 R 是(1,3)型张量场，记$(\nabla_{X_1}R)(X_2,X_3)Y=(\nabla_{X_1}R)(X_2,X_3,Y)$，由于 ∇无挠，由(1.6.12)式得向量场的等式

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{X_1}R)(X_2,X_3)Y+(\nabla_{X_2}R)(X_3,X_1)Y+(\nabla_{X_3}R)(X_1,X_2)Y\\
=&\ \nabla_{X_1}R(X_2,X_3)Y-R(\nabla_{X_1}X_2,X_3)Y-R(X_2,\nabla_{X_1}X_3)Y\\
&-R(X_2,X_3)\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_2}R(X_3,X_1)Y-R(\nabla_{X_2}X_3,X_1)Y\\
&-R(X_3,\nabla_{X_2}X_1)Y-R(X_3,X_1)\nabla_{X_2}Y+\nabla_{X_3}R(X_1,X_2)Y\\
&-R(\nabla_{X_3}X_1,X_2)Y-R(X_1,\nabla_{X_3}X_2)Y-R(X_1,X_2)\nabla_{X_3}Y\\
=&\ \nabla_{X_1}R(X_2,X_3)Y+\nabla_{X_2}R(X_3,X_1)Y+\nabla_{X_3}R(X_1,X_2)Y\\
&-R([X_1,X_2],X_3)Y-R([X_2,X_3],X_1)Y-R([X_3,X_1],X_2)Y\\
&-R(X_2,X_3)\nabla_{X_1}Y-R(X_3,X_1)\nabla_{X_2}Y-R(X_1,X_2)\nabla_{X_3}Y\\
=&\ \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}\nabla_{X_3}Y-\nabla_{X_1}\nabla_{X_3}\nabla_{X_2}Y-\nabla_{X_1}\nabla_{[X_2,X_3]}Y\\
&+\nabla_{X_2}\nabla_{X_3}\nabla_{X_1}Y-\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}\nabla_{X_3}Y-\nabla_{X_2}\nabla_{[X_3,X_1]}Y\\
&+\nabla_{X_3}\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}Y-\nabla_{X_3}\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}Y-\nabla_{X_3}\nabla_{[X_1,X_2]}Y\\
&-\nabla_{[X_1,X_2]}\nabla_{X_3}Y+\nabla_{X_3}\nabla_{[X_1,X_2]}Y+\nabla_{[[X_1,X_2],X_3]}Y\\
&-\nabla_{[X_2,X_3]}\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_1}\nabla_{[X_2,X_3]}Y+\nabla_{[[X_2,X_3],X_1]}Y\\
&-\nabla_{[X_3,X_1]}\nabla_{X_2}Y+\nabla_{X_2}\nabla_{[X_3,X_1]}Y+\nabla_{[[X_3,X_1],X_2]}Y\\
&-\nabla_{X_2}\nabla_{X_3}\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_3}\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}Y+\nabla_{[X_2,X_3]}\nabla_{X_1}Y\\
&-\nabla_{X_3}\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}Y+\nabla_{X_1}\nabla_{X_3}\nabla_{X_2}Y+\nabla_{[X_3,X_1]}\nabla_{X_2}Y\\
&-\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}\nabla_{X_3}Y+\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}\nabla_{X_3}Y+\nabla_{[X_1,X_2]}\nabla_{X_3}Y\\
=&\ \nabla_{[[X_1,X_2],X_3]+[[X_2,X_3],X_1]+[[X_3,X_1],X_2]}Y\\
=&\ \nabla_0 Y=0.
\end{aligned}
$$

故式(2.3.19)成立. 下面先证明

$$(\nabla_{X_1}R)(Y,Z,X_2,X_3)=g(Y,(\nabla_{X_1}R)(X_2,X_3)Z) \tag{2.3.23}$$

事实上:由式(1.6.12)得

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{X_1}R)(Y,Z,X_2,X_3)+R(\nabla_{X_1}Y,Z,X_2,X_3)\\
&\quad+R(Y,\nabla_{X_1}Z,X_2,X_3)+R(Y,Z,\nabla_{X_1}X_2,X_3)\\
&\quad+R(Y,Z,X_2,\nabla_{X_1}X_3)\\
&=\nabla_{X_1}R(Y,Z,X_2,X_3)\\
&=\nabla_{X_1}g(Y,R(X_2,X_3)Z)\\
&=g(\nabla_{X_1}Y,R(X_2,X_3)Z)+g(Y,(\nabla_{X_1}R)(X_2,X_3)Z)\\
&\quad+g(Y,R(\nabla_{X_1}X_2,X_3)Z)+g(Y,R(X_2,\nabla_{X_1}X_3)Z)\\
&\quad+g(Y,R(X_2,X_3)\nabla_{X_1}Z)\\
&=R(\nabla_{X_1}Y,Z,X_2,X_3)+g(Y,(\nabla_{X_1}R)(X_2,X_3)Z)\\
&\quad+R(Y,Z,\nabla_{X_1}X_2,X_3)+R(Y,Z,X_2,\nabla_{X_1}X_3)\\
&\quad+R(Y,\nabla_{X_1}Z,X_2,X_3)
\end{aligned}$$

两边相消可得式(2.3.23)成立,由式(2.3.23)得

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{X_1}R)(Y,Z,X_2,X_3)+(\nabla_{X_2}R)(Y,Z,X_3,X_1)\\
&\quad+(\nabla_{X_3}R)(Y,Z,X_1,X_2)\\
&=g[Y,(\nabla_{X_1}R)(X_2,X_3)Z+(\nabla_{X_2}R)(X_3,X_1)Z\\
&\quad+(\nabla_{X_3}R)(X_1,X_2)Z]
\end{aligned}$$

再由 Y 的任意性知,式(2.3.19)与式(2.3.20)等价.

局部(V,x_i)上,设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 V 的基,对偶为 $\omega^1,\cdots,\omega^n$,因 R 是(1,3)型张量场,所以

$$R=\sum_{i,j,k,l}R^i_{jkl}X_i\otimes\omega^j\otimes\omega^k\otimes\omega^l,$$

$$\nabla_{X_h}R=\sum_{i,j,k,l}R^i_{jkl;h}X_i\otimes\omega^j\otimes\omega^k\otimes\omega^l.$$

所以$(\nabla_{X_h}R)(X_j,X_k,X_l)=\sum_i R^i_{jkl;h}X_i$,由式(2.3.19)得

$$\sum_i (R^i_{jkl;h} + R^i_{jlh;k} + R^i_{jhk;l}) X_i$$
$$= (\nabla_{X_h} R)(X_j, X_k, X_l) + (\nabla_{X_k} R)(X_j, X_l, X_h) + (\nabla_{X_l} R)(X_j, X_h, X_k)$$
$$= (\nabla_{X_h} R)(X_j, X_k) X_l + (\nabla_{X_k} R)(X_j, X_l) X_h + (\nabla_{X_l} R)(X_j, X_h) X_k$$
$$= 0.$$

所以式(2.3.21)成立,因为 $R_{ijkl} = \sum_s R^s_{jkl} g_{si}$,且 $g_{si;h} = 0$,得

$$R_{ijkl;h} = \sum_s R^s_{jkl;h} g_{si}.$$

从而得

$$R_{ijkl;h} + R_{ijlh;k} + R_{ijhk;l}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} (R^s_{jkl;h} + R^s_{jlh;k} + R^s_{jhk;l}) g_{si}.$$

故式(2.3.21)与式(2.3.22)等价.

或在式(2.3.20)中,取 $Y = \frac{\partial}{\partial x_i}, Z = \frac{\partial}{\partial x_j}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_k}, X_3 = \frac{\partial}{\partial x_l}, X_1 = \frac{\partial}{\partial x_h}$,则得式(2.3.22).

注 式(2.3.21)就是式(1.7.17).

定理 2.3.8 黎曼流形(M^n, g)上的$(0,4)$型曲率张量场 R 具有以下性质:

(1) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_2, X_1, X_3, X_4)$ (2.3.24)

(2) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_4, X_3)$ (2.3.25)

(3) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2)$ (2.3.26)

其中 $X_1, X_2, X_3, X_4 \in C^\infty(M; T(M))$,局部$(V, x_i)$上,上面三式分别为

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \ R_{iikl} = 0 \quad (2.3.27)$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \ R_{ijkk} = 0 \quad (2.3.28)$$

$$R_{ijkl} = R_{klij} \quad (2.3.29)$$

证明:(1) 由定义及无挠性得

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_2, X_1, X_3, X_4)$$

$$
\begin{aligned}
&= g(X_1,R(X_3,X_4)X_2) + g(X_2,R(X_3,X_4)X_1) \\
&= g(X_1, \nabla_{X_3} \nabla_{X_4}X_2 - \nabla_{X_4} \nabla_{X_3}X_2 - \nabla_{[X_3,X_4]}X_2) \\
&\quad + g(X_2, \nabla_{X_3} \nabla_{X_4}X_1 - \nabla_{X_4} \nabla_{X_3}X_1 - \nabla_{[X_3,X_4]}X_1) \\
&= g(X_1, \nabla_{X_3} \nabla_{X_4}X_2) + g(X_2, \nabla_{X_3} \nabla_{X_4}X_1) - g(X_1, \nabla_{X_4} \nabla_{X_3}X_2) \\
&\quad - g(X_2, \nabla_{X_4} \nabla_{X_3}X_1) - g(X_1, \nabla_{[X_3,X_4]}X_2) - g(X_2, \nabla_{[X_3,X_4]}X_1) \\
&= g(X_1, \nabla_{X_3} \nabla_{X_4}X_2) + g(\nabla_{X_3}X_1, \nabla_{X_4}X_2) + g(\nabla_{X_4}X_1, \nabla_{X_3}X_2) \\
&\quad + g(\nabla_{X_3} \nabla_{X_4}X_1, X_2) - g(\nabla_{X_3}X_1, \nabla_{X_4}X_2) - g(\nabla_{X_4}X_1, \nabla_{X_3}X_2) \\
&\quad - g(X_1, \nabla_{X_4} \nabla_{X_3}X_2) - g(\nabla_{X_4} \nabla_{X_3}X_1, X_2) - [X_3,X_4]g(X_1,X_2) \\
&= X_3[g(\nabla_{X_4}X_1,X_2) + g(X_1, \nabla_{X_4}X_2)] - [X_3,X_4]g(X_1,X_2) \\
&\quad - X_4[g(\nabla_{X_3}X_1,X_2) + g(X_1, \nabla_{X_3}X_2)] \\
&= X_3X_4g(X_1,X_2) - X_4X_3g(X_1,X_2) - [X_3,X_4]g(X_1,X_2) \\
&= [X_3,X_4]g(X_1,X_2) - [X_3,X_4]g(X_1,X_2) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(2) 由于 $R(X_3,X_4)=-R(X_4,X_3)$,所以

$$
\begin{aligned}
R(X_1,X_2,X_3,X_4) &= g(X_1,R(X_3,X_4)X_2) \\
&= - g(X_1,R(X_4,X_3)X_2) = - R(X_1,X_2,X_4,X_3).
\end{aligned}
$$

(3) 由式(2.3.16)及式(2.3.24)和式(2.3.25)得

$$
\begin{aligned}
0 =& R(X_1,X_2,X_3,X_4) + R(X_1,X_3,X_4,X_2) + R(X_1,X_4,X_2,X_3) \\
&- R(X_2,X_3,X_4,X_1) - R(X_2,X_4,X_1,X_3) - R(X_2,X_1,X_3,X_4) \\
&- R(X_3,X_4,X_1,X_2) - R(X_3,X_1,X_2,X_4) - R(X_3,X_2,X_4,X_1) \\
&+ R(X_4,X_1,X_2,X_3) + R(X_4,X_2,X_3,X_1) + R(X_4,X_3,X_1,X_2) \\
=& 2R(X_1,X_2,X_3,X_4) - 2R(X_3,X_4,X_1,X_2)
\end{aligned}
$$

所以 $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2)$. 局部公式(2.3.27)、式(2.3.28)和式(2.3.29)显然成立.

2.4 Riemann 流形的结构方程

设(M^n,g)是 n 维 Riemann 流形, ∇是M^n 上的 Riemann 联络,

V 是 M^n 的坐标域，$X_1,\cdots,X_n$ 是 V 上的一般切标架场，对偶为 $\omega^1,\cdots,\omega^n$，设

$$\nabla_{X_i}X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k,\ \omega_i^j = \sum_k \Gamma_{ki}^j \omega^k,\ g_{ij} = g(X_i, X_j).$$

由于 ∇ 是无挠度量联络，由定理 1.5.8 得

定理 2.4.1 Riemann 流形 (M^n, g) 在一般标架场下的第一、第二结构方程分别是

$$d\omega^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \omega^j,\ dg_{ij} = \sum_k (\omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki}) \tag{2.4.1}$$

$$d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j, \Omega_i^j = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ikl}^j \omega^k \wedge \omega^l \tag{2.4.2}$$

设

$$\omega_{ij} = \sum_k \omega_i^k g_{kj},\ \Omega_{ij} = \sum_k \Omega_i^k g_{kj} \tag{2.4.3}$$

ω_{ij} 和 Ω_{ij} 分别称为 Riemann 联络 ∇ 的联络形式和曲率形式，ω_{ij} 是一次微分形式，Ω_{ij} 是二次微分形式，由式(2.4.3) 及式(2.3.2) 得

$$\begin{aligned}\Omega_{ij} = \sum_m \Omega_i^m g_{mj} &= \frac{1}{2}\sum_{m,k,l} R_{ikl}^m g_{mj} \omega^k \wedge \omega^l \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{jikl}\omega^k \wedge \omega^l = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

显然 $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$.

因 (M^n, g) 是黎曼流形，所以在局部 (V, x_i) 上，有标准正交基向量场 $e_1,\cdots,e_n$，设对偶为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$. 即 $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$，因 $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$，从而式(2.4.3)及式(2.3.2)为

$$\omega_i^j = \omega_{ij},\ \Omega_i^j = \Omega_{ij},\ R_{jkl}^i = R_{ijkl} \tag{2.4.5}$$

此时 (ω_{ij}) 和 (Ω_{ij}) 都是反对称方阵，由此得

定理 2.4.2 Riemann 流形 (M^n, g) 在标准正交基向量场下的第一、第二结构方程分别是

(1) $$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j,\ \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \tag{2.4.6}$$

(2) $$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij} \tag{2.4.7}$$

其中 $\Omega_{ij} = -\dfrac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\,\omega_k \wedge \omega_l$.

在(M^n,g)的局部 V 上,取标准正交标架场 $e_1,\cdots,e_n$,对偶为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$,由式(1.7.1)和式(1.7.9)得,e_i 和 ω_i 的绝对微分分别是

$$De_i = \sum_j \omega_{ij}\otimes e_j,\quad D\omega_i = \sum_j \omega_{ij}\otimes\omega_j \tag{2.4.8}$$

与式(2.4.6)比较,第一结构方程是对 ω_i 求外微分,由式(1.7.3)及式(1.7.10)得

$$\nabla_{e_i} e_j = (De_j)(e_i),\quad \nabla_{e_i}\omega_j = (D\omega_j)(e_i) \tag{2.4.9}$$

设 $T = \sum_{i,j,k} t^i_{jk} e_i \otimes \omega_j \otimes \omega_k$ 是 V 上的(1,2)型张量场,由式(1.7.15)得分量函数 t^i_{jk} 的绝对微分

$$\begin{aligned} Dt^i_{jk} &= \mathrm{d}t^i_{jk} + \sum_l t^l_{jk}\omega^i_l - \sum_l t^i_{lk}\omega^l_j - \sum_l t^i_{jl}\omega^l_k \\ &= \mathrm{d}t^i_{jk} + \sum_l t^l_{jk}\omega_{li} + \sum_l t^i_{lk}\omega_{lj} + \sum_l t^i_{jl}\omega_{lk} \\ &= \sum_l t^i_{jk;l}\omega_l \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

式中全为加号.

注 设 T 是(r,s)型张量场,局部 V 上,设

$$T = \sum t^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_s} e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes\omega_{k_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{k_s}.$$

则分量函数 $t^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_s}$ 的绝对微分是

$$\begin{aligned} Dt^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_s} &= \mathrm{d}t^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_s} + \sum_l t^{l j_2\cdots j_r}_{k_1\cdots k_s}\omega_{lj_1} + \cdots \\ &\quad + \sum_l t^{j_1\cdots j_{r-1} l}_{k_1\cdots k_s}\omega_{lj_r} + \sum_l t^{j_1\cdots j_r}_{l k_2\cdots k_s}\omega_{lk_1} + \cdots + \sum_l t^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_{s-1} l}\omega_{lk_s} \\ &= \sum_i t^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_s;i}\,\omega_i \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

公式(2.4.11)今后常用,它给出了协变导数与绝对微分及外微分的关系:

例 1 设(M^n,g)是 Riemann 流形,$T = \sum_{i,j} t_{ij}\omega_i\otimes\omega_j$ 是 M^n 上的(0,2)型张量场,证明:

$$t_{ij;kl} - t_{ij;lk} = \sum_m (t_{mj}R_{mikl} + t_{im}R_{mjkl}) \qquad (2.4.12)$$

证明:由 t_{ij} 的绝对微分的定义得

$$dt_{ij} = \sum_k t_{ij;k}\omega_k - \sum_m t_{mj}\omega_{mi} - \sum_m t_{im}\omega_{mj} \qquad (2.4.13)$$

又 t_{ijk} 的绝对微分是

$$Dt_{ij;k} = dt_{ij;k} + \sum_m t_{mj;k}\omega_{mi} + \sum_m t_{im;k}\omega_{mj} + \sum_m t_{ij;m}\omega_{mk} = \sum_l t_{ij;kl}\omega_l \qquad (2.4.14)$$

对式(2.4.13)外微分,并利用式(2.4.13)、式(2.4.14)及第一、第二结构方程式(2.4.6)和式(2.4.7)得

$$\begin{aligned}
0 = d(dt_{ij}) &= \sum_k dt_{ij;k} \wedge \omega_k + \sum_k t_{ij;k} d\omega_k \\
&\quad - \sum_m dt_{mj} \wedge \omega_{mi} - \sum_m t_{mj} d\omega_{mi} - \sum_m dt_{im} \wedge \omega_{mj} - \sum_m t_{im} d\omega_{mj} \\
&= \sum_{k,l} t_{ij;kl}\omega_l \wedge \omega_k - \sum_{m,k} t_{mj;k}\omega_{mi} \wedge \omega_k - \sum_{m,k} t_{im;k}\omega_{mj} \wedge \omega_k \\
&\quad - \sum_{m,k} t_{ij;m}\omega_{mk} \wedge \omega_k + \sum_{m,k} t_{ij;k}\omega_{km} \wedge \omega_m - \sum_{m,k} t_{mj;k}\omega_k \wedge \omega_{mi} \\
&\quad + \sum_{m,k} t_{kj}\omega_{km} \wedge \omega_{mi} + \sum_{k,m} t_{mk}\omega_{kj} \wedge \omega_{mi} - \sum_{m,k} t_{mj}\omega_{mk} \wedge \omega_{ki} \\
&\quad - \sum_m t_{mj}\Omega_{mi} - \sum_{m,k} t_{im;k}\omega_k \wedge \omega_{mj} + \sum_{k,m} t_{km}\omega_{ki} \wedge \omega_{mj} \\
&\quad + \sum_{k,m} t_{ik}\omega_{km} \wedge \omega_{mj} - \sum_{k,m} t_{im}\omega_{mk} \wedge \omega_{kj} - \sum_m t_{im}\Omega_{mj} \\
&= \sum_{k,l} \left[t_{ij;kl} + \frac{1}{2}\sum_m t_{mj}R_{milk} + \frac{1}{2} t_{im}R_{mjlk} \right]\omega_l \wedge \omega_k
\end{aligned}$$

所以 $t_{ij;kl} - t_{ij;lk} = \sum_m t_{mj}R_{mikl} + \sum_m t_{im}R_{mjkl}$.

例 2 设 $R = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}\omega_i \otimes \omega_j \otimes \omega_k \otimes \omega_l$ 是(0,4)型张量场,分量函数 $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$,$R_{ijkl}$ 的绝对微分

$$DR_{ijkl} = dR_{ijkl} + \sum_h R_{hjkl}\omega_{hi} + \sum_h R_{ihkl}\omega_{hj} + \sum_h R_{ijhl}\omega_{hk} + \sum_h R_{ijkh}\omega_{hl}$$

$$= \sum_h R_{ijkl;h}\omega_h \tag{2.4.15}$$

证明:第二 Bianchi 恒等式成立:

$$R_{ijkl;h} + R_{ijlh;k} + R_{ijhk;l} = 0 \tag{2.4.16}$$

证明:对第二结构方程

$$\Omega_{ij} = \mathrm{d}\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l$$

外微分来证,留作习题.

2.5 Riemann 流形 (M^n, g) 上函数 f 的 Laplacian Δf

1. Δf 的定义及局部表示

设 (M^n, g) 是 n 维 Riemann 流形,$f \in C^\infty(M;R)$,局部 (V, x_i) 上,切向量场 $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$,$X^i$ 沿 $\frac{\partial}{\partial x_k}$ 的协变导数为

$$X^i_{;k} = \frac{\partial X^i}{\partial x_k} + \sum_j X^j \Gamma^i_{kj}.$$

定义 2.5.1 向量场 $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 的散度 div X 是函数:

$$\mathrm{div}\, X \overset{\Delta}{=} \sum_i X^i_{;i} = \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \sum_{i,j} X^j \Gamma^i_{ij} \tag{2.5.1}$$

定义 2.5.2 函数 f 的梯度 $\mathrm{grad} f$ 是一向量场:

$$g(\mathrm{grad} f, Y) \overset{\Delta}{=} \mathrm{d}f(Y) = Yf \tag{2.5.2}$$

其中 $Y \in C^\infty(M; T(M))$ 是 M 上任意切向量场.

局部 (V, x_i) 上,设 $\mathrm{grad} f = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x_i}$,由式(2.5.2)及度量 g 的性质得

$$g\left(\mathrm{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = g\left(\sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_i f^i g_{ij}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} f = f_{;j}.$$

从而得 $f^i = \sum_k f^k \delta_k^i = \sum_k f^k \sum_j g_{kj} g^{ji} = \sum_j g^{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j}$,故

$$\mathrm{grad} f = \sum_i \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.5.3}$$

设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 上的标准正交基,则

$$\mathrm{grad} f = \sum_i (e_i f) e_i \tag{2.5.4}$$

定义 2.5.3 (M^n, g) 上函数 f 的 Laplacian Δf 为

$$\begin{aligned} \Delta f &\stackrel{\Delta}{=} \mathrm{div}\ \mathrm{grad} f = \sum_i f^i_{;i} \\ &= \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x_i} + \sum_{i,j} f^j \Gamma^i_{ij} \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j,k} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Gamma^i_{ij} \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

记 $G = (g_{ij})$, $|G| = \det(g_{ij})$, $G^{-1} = (g^{ij})$,我们有

定理 2.5.1 设 $f \in C^\infty(M; R)$,则在局部 (V, x_i) 上,有

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{|G|} \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \tag{2.5.6}$$

证明:因为

$$\frac{\partial |G|}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_{i1}}{\partial x_k} & \cdots & \frac{\partial g_{in}}{\partial x_k} \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} G_{ij}$$

其中 G_{ij} 是 $G = (g_{ij})$ 中元素 g_{ij} 的代数余子式,又 $g^{ij} = \frac{1}{|G|} G_{ij}$,所以 $G_{ij} = |G| g^{ij}$,故

$$\frac{\partial |G|}{\partial x_k} = \sum_{i,j=1}^n |G| g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \tag{2.5.7}$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\ln|G| = \frac{1}{|G|}\frac{\partial|G|}{\partial x_k} = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}.$$

再由式(2.2.15)得

$$\sum_i \Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{i,l} g^{il}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,l} g^{il}\frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\ln|G| \qquad (2.5.8)$$

故有

$$\Delta f = \sum_i f^i_{;i} = \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x_i} + \sum_j f^j \sum_i \Gamma^i_{ij}$$

$$= \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x_i} + \sum_j f^j \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\ln|G| = \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{1}{|G|}\sum_i f^i\frac{\partial|G|}{\partial x_i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{|G|}f^i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[\sqrt{|G|}\sum_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}].$$

由式(2.5.8),式(2.5.5) 又可写为

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial \ln|G|}{\partial x_i}\right]\frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (2.5.9)$$

由式(2.5.8),式(2.5.1) 可写为

$$\operatorname{div} X = \sum_i\left(\frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}X^i\frac{\partial}{\partial x_i}\ln|G|\right) \qquad (2.5.10)$$

设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 上的标准正交基向量场,$\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是其对偶,由式(1.7.30)、式(1.7.31) 和式(1.7.32) 知,f 沿切方向 e_i 的协变导数为

$$f_{;i} = e_i f = \nabla_{e_i} f \qquad (2.5.11)$$

f 的一阶、二阶绝对微分为

$$Df = \mathrm{d}f = \sum_i (e_i f)\omega_i = \sum_i f_{;i}\omega_i \qquad (2.5.12)$$

$$D^2 f = \sum_i Df_{;i} \otimes \omega_i = \sum_{i,j} f_{;ij}\omega_j \otimes \omega_i \tag{2.5.13}$$

其中 $f_{;ij} = e_j(f_{;i}) - \sum_k f_{;k}\Gamma_{ji}^k = e_j(e_i f) - \sum_k (e_k f)\Gamma_{ji}^k$，而 $\mathrm{grad} f = \sum_i (e_i f) e_i \triangleq \sum_i f^i e_i$，且 $f^i = e_i f = f_{;i}$，得 $\Delta f = \sum_i f^i_{;i} = \sum_i f_{;ii}$，又 $\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$，从而我们有

定理 2.5.2 设 $f \in C^\infty(M;R)$，局部 V 上，取 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的标准正交标架场，则

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_i f_{;ii} = \sum_i [e_i(e_i f) - \sum_k (e_k f)\Gamma_{ii}^k] \\ &= \sum_i [e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f]\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

注 公式(2.5.14)也可由式(1.7.29)得：因为

$$D^2 f(e_i, e_j) = e_j(e_i f) - (\nabla_{e_j} e_i) f,$$

$$D^2 f = \sum_{i,j} f_{;ij}\omega_i \otimes \omega_j$$

所以

$$f_{;ij} = D^2 f(e_i, e_j) = e_j(e_i f) - (\nabla_{e_j} e_i) f,$$

从而 $\Delta f = \sum_i f_{,ii} = \sum_i [e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f]$.

注 1 当 $M^n = R^n$ 时，$\Gamma_{ij}^k = 0$，且 $g_{ij} = \delta_{ij}$，任 $f \in C^\infty(R^n; R)$，有

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \tag{2.5.15}$$

这正是 R^n 中 n 元函数 f 的 Laplacian.

注 2 任 (r,s) 型张量场 T，可算其分量的 Laplacian 算子，如 $T = \sum_{i,j,k} t_{jk}^i e_i \otimes \omega_j \otimes \omega_k$ 是(1,2)型张量场，t_{jk}^i 的 Laplacian 算子为

$$\Delta t_{jk}^i = \sum_l t_{jk;ll}^i \tag{2.5.16}$$

2. 散度、梯度和 Laplacian 算子的性质

定理 2.5.3 设 $(M^n, g) = (M^n; <,>)$ 是 n 维 Riemann 流

形，$f \in C^{\infty}(M;R)$，$X, Y \in C^{\infty}(M;T(M))$，则

(1) $\mathrm{div}(fX) = f \cdot \mathrm{div}X + Xf$ (2.5.17)

(2) $\mathrm{div}(X + Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y$ (2.5.18)

(3) $\mathrm{grad}f^2 = 2f \cdot \mathrm{grad}f$ (2.5.19)

证明：(1) 局部 (V, x_i) 上，$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$fX = \sum_i fX^i \frac{\partial}{\partial x_i}$，由式(2.5.1)得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(fX) &= \sum_i \left[\frac{\partial(fX^i)}{\partial x_i} + \sum_j fX^j \Gamma^i_{ij}\right] \\ &= f\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X^i + f\sum_{i,j} X^j \Gamma^i_{ij} \\ &= f \cdot \mathrm{div}X + Xf.\end{aligned}$$

(2) 设 $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$，那么 $X + Y = \sum_i (X^i + Y^i)\frac{\partial}{\partial x_i}$，由式(2.5.1)得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(X + Y) &= \sum_i \frac{\partial(X^i + Y^i)}{\partial x_i} + \sum_{i,j}(X^j + Y^j)\Gamma^i_{ij} \\ &= \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \sum_{i,j} X^j \Gamma^i_{ij} + \sum_i \frac{\partial Y^i}{\partial x_i} + \sum_{i,j} Y^j \Gamma^i_{ij} \\ &= \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y.\end{aligned}$$

(3) 因为 $\mathrm{grad}f = \sum_i \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$，所以

$$\mathrm{grad}f^2 = \sum_i \left[\sum_j g^{ij} \frac{\partial f^2}{\partial x_j}\right]\frac{\partial}{\partial x_i} = 2f \cdot \mathrm{grad}f.$$

定理 2.5.4 设 (M^n, g) 是 n 维 Riemann 流形，f、$h \in C^{\infty}(M;R)$，则

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= h\Delta f + f\Delta h + 2g(\mathrm{d}f, \mathrm{d}h) \\ &= h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \mathrm{grad}f, \mathrm{grad}h\rangle \qquad (2.5.20)\end{aligned}$$

特别 $h = f$ 时，有

$$\begin{aligned}\Delta f^2 &= 2f\Delta f + 2g(\mathrm{d}f, \mathrm{d}f) = 2f\Delta f + 2|\mathrm{grad}f|^2 \\ &= 2f\Delta f + 2|Df|^2 \qquad (2.5.21)\end{aligned}$$

证法 1:局部(V,x_i)上,取标准正交切标架场 $e_1,\cdots,e_n$,对偶为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$,那么由式(2.5.4)和式(2.5.12)得

$$\mathrm{grad} f = \sum_i (e_i f) e_i,\ Df = \sum_i (e_i f)\omega_i.$$

向量场 $\mathrm{grad} f$ 和一次微分形式 Df 的长度的平方相等,即

$$|\mathrm{grad} f|^2 = \sum_i (e_i f)^2 = |Df|^2$$

由定义及式(2.5.17) 和式(2.5.18) 得

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= \mathrm{div}\,\mathrm{grad}(fh) = \mathrm{div}\Big[\sum_i e_i(fh)e_i\Big] \\ &= \mathrm{div}\Big[f\sum_i (e_i h)e_i + h\sum_i (e_i f)e_i\Big] \\ &= \mathrm{div}[f\cdot\mathrm{grad}h + h\cdot\mathrm{grad}f] \\ &= f\Delta h + h\Delta f + (\mathrm{grad}h)f + (\mathrm{grad}f)h \\ &= f\Delta h + h\Delta f + 2\sum_i (e_i h)(e_i f).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}g(\mathrm{d}f,\mathrm{d}h) &= g\Big(\sum_i (e_i f)\omega_i, \sum_j (e_j h)\omega_j\Big) \\ &= \sum_i (e_i f)(e_j h)g^{ij} = \sum_i (e_i f)(e_i h)\end{aligned}$$

其中 $g_{ij} = g(e_i,e_j) = \delta_{ij}, g^{ij} = g(\omega_i,\omega_j) = \delta^{ij}$.

证法 2:局部(V,x_i) 上,取坐标标架场$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$,由于

$$\mathrm{grad} f = \sum_i \Big(\sum_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

由定义及式(2.5.17) 和式(2.5.18) 得

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= \mathrm{div}\,\mathrm{grad}(fh) = \mathrm{div}\Big[\sum_i\Big(\sum_j g^{ij}\frac{\partial(fh)}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big] \\ &= \mathrm{div}\Big[f\sum_i\Big(\sum_j g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i} + h\sum_i\Big(\sum_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big] \\ &= \mathrm{div}[f\cdot\mathrm{grad}h + h\cdot\mathrm{grad}f] \\ &= f\Delta h + h\Delta f + (\mathrm{grad}h)f + (\mathrm{grad}f)h\end{aligned}$$

$$= f\Delta h + h\Delta f + 2\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j}.$$

而

$$2g(\mathrm{d}f,\mathrm{d}h) = 2g\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i, \sum_j \frac{\partial h}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)$$

$$= 2\sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j} g^{ij},$$

$$2g(\mathrm{grad}f, \mathrm{grad}h)$$

$$= 2g\left(\sum_i \left(\sum_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_k \left(\sum_l g^{kl}\frac{\partial h}{\partial x_l}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

$$= 2\sum_{i,j,k,l} g^{ij}g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_l} g_{ik}$$

$$= 2\sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_i} = 2\sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j}.$$

其中用到了 $\sum_k g^{kl}g_{ki} = \delta_i^l$.

证法 3: 直接用公式(2.5.6)求

$$\Delta(fh) = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{G}\sum_j g^{ij}\frac{\partial(fh)}{\partial x_j}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{|G|}\sum_j g^{ij}\left(f\frac{\partial h}{\partial x_j} + h\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right]$$

$$= f\Delta h + h\Delta f + \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\sqrt{|G|}\sum_j g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i}\cdot\sqrt{|G|}\sum_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$= f\Delta h + h\Delta f + 2\sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j}.$$

注 显然有 $\Delta(f+h) = \Delta f + \Delta h$.

3. Hopf 引理

本节要用到微分流形上积分的 Stokes 定理,为此先介绍该定理

定理 2.5.5(stokes) 设 M^n 是可定向的 n 维 C^∞ 微分流形,

M^n 的边界∂M^n($n-1$ 维微分流形)有诱导定向,$\omega \in \Lambda^{n-1}(M^n)$,$\omega$ 在∂M^n 上可积,$\mathrm{d}\omega$ 在M^n 上可积,则有积分公式

$$\int_{M^n} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M^n} \omega \tag{2.5.22}$$

当 $\partial M^n = \emptyset$(空集)时,$\int_{\partial M^n} \omega = 0$.

注 定理 2.5.5 的证明见《微分流形与黎曼几何》,纪永强著,陕西师范大学出版社,1994 年 7 月.

定理 2.5.6 设(M^n, g)是 n 维紧致连通(无边)定向的 Riemann 流形,则对任 $f \in C^{\infty}(M;R)$,有

$$\int_{M} \Delta f \mathrm{d}v = 0 \tag{2.5.23}$$

其中 $\mathrm{d}v = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ 是M^n 的体积元素.

证明:设 V 是M^n 的局部坐标域,$e_1, \cdots, e_n$ 是V 上的标准正交基向量场,$\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为其对偶,则

$$f_{;i} = e_i f = \nabla_{e_i} f \tag{1}$$

$$\mathrm{d}f_{;i} = \sum_j f_{;ij}\omega_j - \sum_j f_{;j}\omega_{ji} \tag{2}$$

由外微分的性质及第一结构方程得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\sum_i (-1)^{i-1} f_{;i}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n) \\
&= \sum_i (-1)^{i-1} \mathrm{d}f_{;i} \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\
&\quad + \sum_i (-1)^{i-1} f_{;i} \sum_j (-1)^{j-1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\omega_j \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\
&= \sum_i (-1)^{i-1} \sum_j (f_{;ij}\omega_j - f_{;j}\omega_{ji}) \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\
&\quad + \sum_i (-1)^{i-1} f_{;i} \sum_j (-1)^{j-1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge (\sum_k \omega_{jk} \wedge \omega_k) \wedge \cdots \\
&\quad \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\
&= \sum_i (-1)^{i-1} f_{;ii}\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\
&\quad - \sum_i (-1)^{i-1} \sum_j f_{;j}\omega_{ji} \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n
\end{aligned}$$

$$+\sum_i(-1)^{i-1}f_{;i}\sum_j(-1)^{j-1}\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{ji}\wedge\omega_i\wedge\cdots\wedge\omega_n$$

$$=\sum_i f_{;ii}\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n=\sum_i f_{;ii}\mathrm{d}v \tag{3}$$

由于$\partial M^n=\varnothing$,由 Stokes 定理 2.5.5 得

$$\begin{aligned}\int_{M^n}\Delta f\mathrm{d}v&=\int_{M^n}\sum_i f_{;ii}\mathrm{d}v\\&=\int_{M^n}\mathrm{d}\Big(\sum_i(-1)^{i-1}f_{;i}\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_i\wedge\cdots\wedge\omega_n\Big)\\&=\int_{\partial M^n}\sum_i(-1)^{i-1}f_{;i}\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_i\wedge\cdots\wedge\omega_n\\&=0.\end{aligned}$$

定义 2.5.4 设(M^n,g)是 Riemann 流形,$f\in C^\infty(M;R)$

(1) 若 $\Delta f=0$,则称 f 是M 上的调和函数.

(2) 若 $\Delta f\geqslant0$,则称 f 是M 上的下调和函数.

(3) 若 $\Delta f\leqslant0$,则称 f 是M 上的上调和函数.

引理 2.5.1 (Hopf)设(M^n,g)是 n 维紧致连通的 Riemann 流形,$f\in C^\infty(M;R)$,若 $\Delta f\geqslant0$(或 $\Delta f\leqslant0$,或 $\Delta f=0$),则

$$f=\text{const} \tag{2.5.24}$$

证明:由定理 2.5.6 知,$\int_M\Delta f\mathrm{d}v=0$,又 $\Delta f\geqslant0$,所以

$$\Delta f=0,f\Delta f=0 \tag{1}$$

又 $\mathrm{d}f=\sum_i(e_if)\omega_i=\sum_i f_{;i}\omega_i$,故

$$\begin{aligned}0=\int_{M^n}f\Delta f\mathrm{d}v&=\int_{M^n}f\sum_i f_{;ii}\mathrm{d}v\\&=\int_{M^n}f\cdot\mathrm{d}(\sum_i(-1)^{i-1}f_{;i}\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_i\wedge\cdots\wedge\omega_n)\\&=\int_{M^n}\mathrm{d}[f\sum_i(-1)^{i-1}f_{;i}\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_i\wedge\cdots\wedge\omega_n]\\&\quad-\int_{M^n}\mathrm{d}f\wedge\sum_i(-1)^{i-1}f_{;i}\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_i\wedge\cdots\wedge\omega_n\end{aligned}$$

$$= \int_{\partial M^n} f \sum_i (-1)^{i-1} f_{;i} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

$$- \int_{M^n} \left(\sum_j f_{;j} \omega_j\right) \wedge \sum_i (-1)^{i-1} f_{;i} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

$$= 0 - \int_{M^n} f_{;i} \omega_i \wedge \sum_i (-1)^{i-1} f_{;i} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

$$= - \int_{M^n} \sum_i f_{;i}^2 \mathrm{d}v$$

又 $\sum_i f_{;i}^2 \geqslant 0$，得 $f_{;i} = 0$，所以 f 是局部常数，又 M^n 连通，故 f 在 M^n 上是常数.

注 引理 2.5.1 说明：紧致连通 Riemann 流形 M^n 上的调和函数、上(或下)调和函数都是常数.

2.6 Riemann 流形(M^n, g)的截面曲率

1. 平面截面曲率的定义

设(M^n, g)是n 维 Riemann 流形，X、Y、Z、W 是M^n 上的光滑切向量场，局部(V, x_i)上，$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$，$Z = \sum_k Z^k \frac{\partial}{\partial x_k}$，$W = \sum_l W^l \frac{\partial}{\partial x_l}$，那么有

$$R(X, Y, Z, W) = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} X^i Y^j Z^k W^l.$$

显然函数 $R(X, Y, Z, W)$ 在 p 点的值只与切向量 X_p, Y_p, Z_p 和 W_p 有关，故可定义

$$R(X, Y, Z, W)(p) = R_p(X_p, Y_p, Z_p, W_p) \quad (2.6.1)$$

其中 R_p 是 p 点的(0,4) 型张量，X_p 等是 p 点的切向量.

定义 2.6.1 设 $L(X_p, Y_p)$是由向量X_p 和 Y_p 张成的二维平面，$L(X_p, Y_p)$的截面曲率定义为

$$K(X_p, Y_p) = \frac{R_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{g_p(X_p, X_p) g_p(Y_p, Y_p) - g_p(X_p, Y_p)^2} \quad (2.6.2)$$

又 $g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p)$，再由式(2.6.1)，式(2.6.2) 可写为

$$K(X,Y)(p)=\left.\frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}\right|_p \tag{2.6.3}$$

定理 2.6.1 平面 $L(X_p,Y_p)$的截面曲率$K(X,Y)(p)$与基向量 X_p 和 Y_p 的选取无关;即设 $\overline{X}_p$ 和 $\overline{Y}_p$ 是平面$L(X_p,Y_p)$的另一组基,且

$$\begin{cases}\overline{X}_p=aX_p+bY_p\\ \overline{Y}_p=cX_p+dY_p\end{cases},\quad ad-bc\neq 0.$$

则有 $K(X,Y)(p)=K(\overline{X},\overline{Y})(p)$.

证明:因为 $R(X,X)=0$, $R(Y,X,X,Y)=-R(X,Y,X,Y)$,所以

$$\begin{aligned}
&R(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})\\
&=R(aX+bY,cX+dY,aX+bY,cX+dY)\\
&=g(aX+bY,R(aX+bY,cX+dY)(cX+dY))\\
&=g(aX+bY,(ad-bc)R(X,Y)(cX+dY))\\
&=(ad-bc)\{acg(X,R(X,Y)X)+adg(X,R(X,Y)Y)+\\
&\quad bcg(Y,R(X,Y)X)+bdg(Y,R(X,Y)Y)\}\\
&=(ad-bc)[adR(X,Y,X,Y)+bcR(Y,X,X,Y)]\\
&=(ad-bc)^2R(X,Y,X,Y) \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})-g(\overline{X},\overline{Y})^2\\
&=g(aX+bY,aX+bY)g(cX+dY,cX+dY)\\
&\quad -g(aX+bY,cX+dY)^2\\
&=(ad-bc)^2[g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2] \qquad (2)
\end{aligned}$$

由式(1)和式(2)及定义得

$$\begin{aligned}
K(\overline{X},\overline{Y})(p)&=\left.\frac{R(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y})}{g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})-g(\overline{X},\overline{Y})^2}\right|_p\\
&=\left.\frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}\right|_p\\
&=K(X,Y)(p)
\end{aligned}$$

局部(V,x_i)上,设$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$是坐标切向量场,$e_1,\cdots,e_n$ 是

标准正交基向量场,则

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p)=\left.\frac{R_{ijij}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\right|_p \tag{2.6.4}$$

$$K(e_i,e_j)(p)=R_{ijij}(p) \tag{2.6.5}$$

注 在 p 点,对切空间 $T_p(M)$中的不同截面,一般有不同的截面曲率.

2. 截面曲率决定曲率张量

定理 2.6.2 任 $X,Y\in C^\infty(M;T(M))$,Riemann 流形(M^n,g)在 p 点的曲率张量 $R(X,Y,Z,W)(p)$由 p 点的所有二维平面截面曲率 $K(X,Y)(p)$惟一确定.

证明:设 $\overline{R}(X,Y,Z,W)$和 $R(X,Y,Z,W)$是满足式(2.3.16)、式(2.3.24)、式(2.3.25)和式(2.3.26)的四重线性函数,依题设,对任 $X,Y\in C^\infty(M;T(M))$

$$\left.\frac{\overline{R}(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}\right|_p$$
$$=\left.\frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}\right|_p$$

即 $\overline{R}(X,Y,X,Y)(p)=R(X,Y,X,Y)(p)$,要证对任 $X,Y,Z,W\in C^\infty(M;T(M))$,有

$$\overline{R}(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W) \tag{1}$$

令 $S=\overline{R}-R$,即:已知 $S(X,Y,X,Y)=0$,求证:$S(X,Y,Z,W)=0$.

事实上,由 $S(X,Y,X,Y)=0$ 得

$$\begin{aligned}0&=S(X+Z,Y,X+Z,Y)\\&=S(X,Y,Z,Y)+S(Z,Y,X,Y)\\&=2S(X,Y,Z,Y)\end{aligned}$$

即

$$S(X,Y,Z,Y)=0 \tag{2}$$

由式(2)得

$$0 = S(X, Y+W, Z, Y+W)$$
$$= S(X, Y, Z, W) + S(X, W, Z, Y) \tag{3}$$

由式(3)及 S 满足式(2.3.25)得

$$S(X, Y, Z, W) = -S(X, W, Z, Y) = S(X, W, Y, Z)$$
$$= -S(X, Z, Y, W) = S(X, Z, W, Y) \tag{4}$$

由式(4)及式(2.3.16)得

$$3S(X, Y, Z, W)$$
$$= S(X, Y, Z, W) + S(X, Z, W, Y) + S(X, W, Y, Z) = 0.$$

3. 常曲率黎曼流形

定义 2.6.2 设(M^n, g)是 n 维 Riemann 流形,若对任 $P \in M$ 及 p 点的任意平面截面 $L(X_p, Y_p)$,有

$$K(X, Y)(p) \equiv c \tag{2.6.6}$$

则称(M^n, g)是常曲率为 c 的 Riemann 流形.

注 式(2.6.6)可写为 $K(X, Y) \equiv c$.

定理 2.6.3 设(M^n, g)是 n 维 Riemann 流形,则(M^n, g)是常曲率为 c 的流形,即任 p 及任截面$L(X_p, Y_p)$,有

$$K(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \equiv c \tag{2.6.7}$$

$$\Leftrightarrow R(X, Y, Z, W) = c[g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)] \tag{2.6.8}$$

$$\Leftrightarrow R(X, Y)Z = c[g(Z, Y)X - g(Z, X)Y] \tag{2.6.9}$$

$\Leftrightarrow$ 局部(V, x_i)上,有

$$R_{ijkl} = c(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{2.6.10}$$

$$\Leftrightarrow R^i_{jkl} = c(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}) \tag{2.6.11}$$

其中 $R_{ijkl} = R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right), g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$等.

证明:式(2.6.7) $\Rightarrow$式(2.6.8):式(2.6.7)为

$$R(X, Y, X, Y) = c[g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2] \tag{1}$$

令

$$\overline{R}(X,Y,Z,W)=c[g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)] \quad (2)$$

易验证，$\overline{R}$ 满足

$$\overline{R}(X,Y,Z,W)=-\overline{R}(Y,X,Z,W),$$

$$\overline{R}(X,Y,Z,W)=-\overline{R}(X,Y,W,Z),$$

$$\overline{R}(X,Y,Z,W)=\overline{R}(Z,W,X,Y),$$

$$\overline{R}(X,Y,Z,W)+\overline{R}(X,Z,W,Y)+\overline{R}(X,W,Y,Z)=0.$$

故 $\overline{R}$ 是满足上各式的(0,4)型曲率张量场，并且由式(2)和式(1)得

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y,X,Y)&=c[g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2]\\&=R(X,Y,X,Y).\end{aligned}$$

由定理 2.6.2 知，$\overline{R}(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W)$，即

$$R(X,Y,Z,W)=c[g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)]$$

式(2.6.7)⇐式(2.6.8)：令 $Z=X, W=Y$ 便可得(1)，即为式(2.6.7).

式(2.6.8)⇒式(2.6.9)：因为对任 $W\in C^{\infty}(M;T(M))$，有

$$\begin{aligned}g(W,R(X,Y)Z)&=R(W,Z,X,Y)\\&=c[g(W,X)g(Z,Y)-g(W,Y)g(Z,X)]\\&=g(W,c[g(Z,Y)X-g(Z,X)Y]),\end{aligned}$$

所以 $R(X,Y)Z=c[g(Z,Y)X-g(Z,X)Y]$.

式(2.6.8)⇐式(2.6.9)：利用式(2.6.9)得

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W)&=g(X,R(Z,W)Y)\\&=g(X,c[g(Y,W)Z-g(Y,Z)W])\\&=c[g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)].\end{aligned}$$

式(2.6.8) ⇔ 式(2.6.10)：显然成立.

式(2.6.10) ⇔ 式(2.6.11)：由

$$\begin{aligned}\sum_m R_{jkl}^m g_{mi}=R_{ijkl}&=c(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})\\&=c\sum_m(\delta_k^m g_{im}g_{jl}-\delta_l^m g_{im}g_{jk})\\&=\sum_m c(\delta_k^m g_{jl}-\delta_l^m g_{jk})g_{mi}\end{aligned}$$

易得，式(2.6.10)与式(2.6.11)等价.

注 式(2.6.9)是向量场的等式,其他都是函数的等式.

注 由定理 2.6.3 的证明易见,若在一点 p,p 点的所有平面截面曲率都等于 $K(p)$,即

$$K(X,Y)(P)=K(p), \quad X,Y \text{ 任意}.$$

则有

$$R(X,Y,Z,W)=K(p)[g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)] \tag{2.6.12}$$

局部(V,x_i)上,在坐标基$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$下,式(2.6.12)为

$$R_{ijkl}=K(p)[g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}] \tag{2.6.13}$$

在标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 下,式(2.6.12)为

$$R_{ijkl}=K(p)(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.6.14}$$

定理 2.6.4 (F. Schur)设(M^n,g)是 n 维连通的 Riemann 流形,$n\geqslant 3$. 若在一点 p 处的所有平面截面曲率都等于 $K(p)$,则 M^n 是常曲率为 K 的流形.

证法 1: 设 V 是局部坐标域,在 V 上取标准正交切标架场 $e_1,\cdots,e_n$,对偶为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$,由题设及式(2.6.14)得

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij} &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k,l}K(p)[\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}]\omega_k\wedge\omega_l \\
&= -\frac{1}{2}K(p)[\omega_i\wedge\omega_j-\omega_j\wedge\omega_i] \\
&= -K(p)\omega_i\wedge\omega_j
\end{aligned} \tag{1}$$

从而第二结构方程为

$$d\omega_{ij}=\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-K\omega_i\wedge\omega_j \tag{2}$$

我们证明 $K(P)\equiv K$ 是常数,为此对式(2)外微分得

$$\begin{aligned}
0=d(d\omega_{ij}) &= \sum_k d\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\sum_k\omega_{ik}\wedge d\omega_{kj}-dK\wedge\omega_i\wedge\omega_j \\
&\quad -Kd\omega_i\wedge\omega_j+K\omega_i\wedge d\omega_j
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k,l}\omega_{il} \wedge \omega_{lk} \wedge \omega_{kj} - K\sum_{k}\omega_i \wedge \omega_k \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l}\omega_{ik} \wedge \omega_{kl} \wedge \omega_{lj}$$
$$+ K\sum_{k}\omega_{ik} \wedge \omega_k \wedge \omega_j - \mathrm{d}K \wedge \omega_i \wedge \omega_j - K\sum_{k}\omega_{ik} \wedge \omega_k \wedge \omega_j$$
$$+ K\sum_{k}\omega_i \wedge \omega_{jk} \wedge \omega_k$$
$$= -\mathrm{d}K \wedge \omega_i \wedge \omega_j \tag{3}$$

因为 $K \in C^\infty(V;R)$，$\mathrm{d}K \in \wedge^1(V)$，令 $\mathrm{d}K = \sum_l K_{;l}\,\omega_l$，其中 $K_{;l} = e_l(K) \in C^\infty(V;R)$，由式(3)得

$$\sum_l K_{;l}\omega_l \wedge \omega_i \wedge \omega_j = 0, i, j \text{ 可取任意实数} \tag{4}$$

因为 $\dim M = n \geqslant 3$，由式(4)得 $K_{;l} = 0$，所以 K 是 V 上的常数，又 M^n 连通，所以 K 在 M^n 上是常数.

证法 2：在局部 V 上取坐标标架场 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$，$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$，$(g^{ij})$ 是 (g_{ij}) 的逆矩阵，由式(2.2.12)知 $g_{ij;k} = 0$. 我们先证明

$$g^{ij}{}_{;k} = 0 \tag{2.6.15}$$

由于

$$0 = \delta^i_{l;k} = \left(\sum_h g^{ih} g_{hl}\right)_{;k} = \sum_h g^{ih}_{;k} g_{hl} + \sum_h g^{ih} g_{hl;k} = \sum_h g^{ih}_{;k} g_{hl},$$

所以

$$g^{ij}_{;k} = \sum_h g^{ih}_{;k} \delta^j_h = \sum_{h,l} g^{ih}_{;k} g_{hl} g^{lj} = \sum_l 0 \cdot g^{lj} = 0.$$

由题设知，式(2.6.13)成立，即

$$R_{hijk} = K(p)[g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}] \tag{5}$$

由式(2.6.11)，式(5)与下式等价

$$R^h_{ijk} = K(p)[\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}] \tag{6}$$

其中 $K \in C^\infty(V;R)$，对式(6)沿 $\frac{\partial}{\partial x_l}$ 方向求协变导数：

$$R^h_{ijk;l} = \frac{\partial K}{\partial x_l}(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}) \tag{7}$$

由第二 Bianchi 恒等式，得

$$
\begin{aligned}
0 &= R^h_{ijk;l} + R^h_{ikl;j} + R^h_{ilj;k} \\
&= \frac{\partial K}{\partial x_l}(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}) + \frac{\partial K}{\partial x_j}(\delta^h_k g_{il} - \delta^h_l g_{ik}) + \frac{\partial K}{\partial x_k}(\delta^h_l g_{ij} - \delta^h_j g_{il})
\end{aligned} \tag{8}
$$

在式(8)中令 $h = k$，并对 k 求和得

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_k \left[\frac{\partial K}{\partial x_l}(\delta^k_j g_{ik} - \delta^k_k g_{ij}) + \frac{\partial K}{\partial x_j}(\delta^k_k g_{il} - \delta^k_l g_{ik}) + \frac{\partial K}{\partial x_k}(\delta^k_l g_{ij} - \delta^k_j g_{il}) \right] \\
&= \frac{\partial K}{\partial x_l}(g_{ij} - n g_{ij}) + n \frac{\partial K}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial K}{\partial x_j} g_{il} + \frac{\partial K}{\partial x_l} g_{ij} - \frac{\partial K}{\partial x_j} g_{il} \\
&= (n-2)\left[\frac{\partial K}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial K}{\partial x_l} g_{ij} \right]
\end{aligned} \tag{9}
$$

因为 $\dim M = n \geqslant 3$，由式(9)得

$$
\frac{\partial K}{\partial x_j} g_{il} = \frac{\partial K}{\partial x_l} g_{ij} \tag{10}
$$

所以

$$
\delta^m_l \frac{\partial K}{\partial x_j} = \sum_i g^{mi} g_{il} \frac{\partial K}{\partial x_j} = \sum_i g^{mi} g_{ij} \frac{\partial K}{\partial x_l} = \delta^m_j \frac{\partial K}{\partial x_l} \tag{11}
$$

选择 $m = j \neq l$，由(11)得

$$
\frac{\partial K}{\partial x_l} = 0, \quad l = 1, 2, \cdots, n \tag{12}
$$

由式(12)知，K 在 V 上是常数，又 M^n 连通，所以 K 在 M^n 上是常数，故 M^n 是常曲率流形.

注 也可以对式(5)求沿 $\frac{\partial}{\partial x_l}$ 方向的协变导数来证.

注 由定理 2.6.4 及式(2.6.10)我们得：对于 (M^n, g) 的局部坐标域 V，在 V 上取标准正交基向量场 $e_1, \cdots, e_n$，则 (M^n, g) 是常曲率为 c 的流形：$R_{ijij} = c$ 的充要条件是

$$
R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.6.16}
$$

对于标准正交基，我们还有以下定理

定理 2.6.5 设 (M^n, g) 是 n 维 Riemann 流形，$e_1, \cdots, e_n$ 是

局部坐标域 V 上的标准正交切标架场，对偶为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$. 那么 M^n 是常曲率为 c 的流形(即 $R_{ijij}=c$)的充要条件是

$$\Omega_{ij}=c[-\omega_i\wedge\omega_j] \tag{2.6.17}$$

证明:"⇒"由(2.6.16)式，

$$\begin{aligned}\Omega_{ij} &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l}c[\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}]\omega_k\wedge\omega_l\\ &= -\frac{1}{2}c[\omega_i\wedge\omega_j-\omega_j\wedge\omega_i]\\ &= -c\omega_i\wedge\omega_j.\end{aligned}$$

"⇐"对 p 点的切空间 $T_p(M)$ 中的任何二维平面 π，设 π 由 e_1,e_2 张成，即 $\pi=L(e_1,e_2)$，其中 $g(e_1,e_1)=g(e_2,e_2)=1$，$g(e_1,e_2)=0$. 将 e_1,e_2 扩充成局部正交基向量场 $e_1,\cdots,e_n$，则对固定的 i,j，因式(2.6.17)成立，所以

$$\begin{aligned}-c\omega_i\wedge\omega_j=\Omega_{ij} &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l\\ &= -\frac{1}{2}R_{ijij}\omega_i\wedge\omega_j-\frac{1}{2}R_{ijji}\omega_j\wedge\omega_i\\ &= -\frac{1}{2}R_{ijij}\omega_i\wedge\omega_j-\frac{1}{2}R_{ijij}\omega_i\wedge\omega_j\\ &= -R_{ijij}\omega_i\wedge\omega_j\end{aligned}$$

所以截面曲率 $K(e_1,e_2)=R_{1212}=c$ 是常数，故 M^n 是常曲率流形.

4. 截面曲率计算

设(M^n,g)是 n 维 Riemann 流形，局部(V,x_i)上，度量 g 表示为

$$g=\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{2.6.18}$$

从而 $g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$已知，可求出$(g_{ij})$的逆矩阵$(g^{ij})$.

由于

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\sum_{k} g^{mk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right), \qquad (2.6.19)$$

所以可算出联络系数 Γ_{ij}^{m}，再求(1,3)型曲率张量场的分量函数 R_{ijk}^{l}：

$$R_{ijk}^{l} = \sum_{s}(\Gamma_{js}^{l}\Gamma_{ki}^{s} - \Gamma_{ks}^{l}\Gamma_{ji}^{s}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ki}^{l} - \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{ji}^{l}, \qquad (2.6.20)$$

再由 $R_{mijk} = \sum_{l} R_{ijk}^{l} g_{lm}$ 便可得

$$\begin{aligned} R_{ijij} &= \sum_{k,l}[\Gamma_{ik}^{l}\Gamma_{jj}^{k} - \Gamma_{jk}^{l}\Gamma_{ij}^{k} + \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{jj}^{l} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ij}^{l}]g_{li} \\ &= \sum_{l}\left[\sum_{k}(\Gamma_{ik}^{l}\Gamma_{jj}^{k} - \Gamma_{jk}^{l}\Gamma_{ij}^{k}) + \frac{\partial \Gamma_{jj}^{l}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial x_j}\right]g_{li}, \end{aligned} \qquad (2.6.21)$$

这样就可得平面 $L\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p\right)$ 的截面曲率：

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^{2}} \qquad (2.6.22)$$

或直接求 R_{ijkl} 便可.

例 1 设 $M^n = R^n$，$x_1, \cdots, x_n$ 是 R^n 的整体坐标，g 为欧氏内积：$g = \sum_{i} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i$，即

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij} \qquad (1.1)$$

$$g(X, Y) = g\left(\sum_{i} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i} X^i Y^i \qquad (1.2)$$

由式(2.6.19)得 $\Gamma_{ij}^{k} = 0$，从而有

$$\nabla_X Y = \sum_{j}(XY^j)\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (1.3)$$

由式(2.6.20)及式(2.6.21)得 $R_{ijk}^{l} = 0$，$R_{ijij} = 0$，故 $K\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0$，所以 R^n 是常曲率为 0 的黎曼流形，称为平坦空间.

例 2 设

$$S^n(a)=\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in R^{n+1}\mid x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=a^2\}$$

是以原点为中心，以 a 为半径的 n 维球面，$S^n(a)$是 R^{n+1}的子空间，求 $S^n(a)$的截面曲率.

解：设 $I:S^n(a)\to R^{n+1}$为包含映射，因 R^{n+1}上的黎曼度量为

$$\tilde{g}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_i+\mathrm{d}x_{n+1}\otimes\mathrm{d}x_{n+1}\tag{2.1}$$

选 $x_1,\cdots,x_n$ 为 $S^n(a)$的局部坐标系，使

$$\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_n)=\left(x_1,\cdots,x_n,\left(a^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

则

$$x_{n+1}=\left(a^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\mathrm{d}x_{n+1}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{d}x_i}{x_{n+1}}\tag{2.2}$$

$S^n(a)$上的度量 g 为诱导度量，即

$$\begin{aligned}g&=(\varphi^{-1})^*\circ I^*\tilde{g}=(\varphi^{-1})^*\tilde{g}\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_i+\left(-\frac{1}{x_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{d}x_i\right)\otimes\left(-\frac{1}{x_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{d}x_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x_i^2}{x_{n+1}^2}\right)\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_i+\sum_{i\neq j}\frac{x_ix_j}{x_{n+1}^2}\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_j\end{aligned}$$

由此得 g 的分量函数为

$$g_{ij}=\delta_{ij}+\frac{x_ix_j}{x_{n+1}^2},\tag{2.3}$$

因为 $\tilde{g}$ 在R^{n+1}上是正定的，所以诱导度量 g 在$S^n(a)$上是正定的，式(2.3)写成矩阵形式为

$$(g_{ij})=I_n+A'A,\tag{2.4}$$

其中 $A=\dfrac{1}{x_{n+1}}(x_1,\cdots,x_n)$，$A'$为$A$ 的转置，I_n 为 n 阶单位方阵.

设$(g^{ij})=I_n+\lambda A'A$ 是(g_{ij})的逆矩阵，由于 AA'是数，则

$$
\begin{aligned}
&(I_n + \lambda A'A)(I_n + A'A)\\
&= I_n + (\lambda + 1)A'A + \lambda A'AA'A\\
&= I_n + [\lambda(1 + AA') + 1]A'A = I_n .
\end{aligned}
$$

得 $\lambda(1 + AA') + 1 = 0$，即

$$
\lambda = \frac{-1}{1 + AA'} = -\frac{1}{1 + \dfrac{1}{x_{n+1}^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = -\frac{x_{n+1}^2}{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} = -\frac{1}{a^2}x_{n+1}^2,
$$

于是

$$
g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{x_i x_j}{a^2}, \tag{2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} g^{kr}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\delta_{rj} + \frac{x_j x_r}{x_{n+1}^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{ri} + \frac{x_i x_r}{x_{n+1}^2}\right)\right.\\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} g^{kr}\left[\left(\frac{2x_j x_r x_i}{x_{n+1}^4} + \frac{\delta_{ij}x_r + \delta_{ir}x_j}{x_{n+1}^2}\right) + \left(\frac{2x_i x_r x_j}{x_{n+1}^4} + \frac{\delta_{ij}x_r + \delta_{jr}x_i}{x_{n+1}^2}\right)\right.\\
&\quad \left. - \left(\frac{2x_i x_j x_r}{x_{n+1}^4} + \frac{\delta_{ir}x_j + \delta_{jr}x_i}{x_{n+1}^2}\right)\right]\\
&= \sum_{r=1}^{n}\left(\delta^{kr} - \frac{x_k x_r}{a^2}\right)\left(\frac{x_i x_j x_r}{x_{n+1}^4} + \frac{\delta_{ij}x_r}{x_{n+1}^2}\right)\\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2}\sum_{r=1}^{n}\left(\delta^{kr}x_r - \frac{x_k x_r^2}{a^2}\right)\left(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2}\right)\\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2}\left(x_k - \frac{x_k}{a^2}\sum_{r=1}^{n} x_r^2\right)\left(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2}\right)\\
&= \frac{x_k}{a^2}\left(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2}\right).
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

$$\sum_{t=1}^{n}(\Gamma_{lj}^{t}\Gamma_{kt}^{s}-\Gamma_{kj}^{t}\Gamma_{lt}^{s})$$

$$=\frac{1}{a^4}\sum_{t=1}^{n}\left[x_t\left(\delta_{lj}+\frac{x_lx_j}{x_{n+1}^2}\right)x_s\left(\delta_{kt}+\frac{x_kx_t}{x_{n+1}^2}\right)-x_t\left(\delta_{kj}+\frac{x_kx_j}{x_{n+1}^2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.x_s\left(\delta_{lt}+\frac{x_lx_t}{x_{n+1}^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a^4}\sum_{t=1}^{n}x_tx_s\left[(\delta_{lj}\delta_{kt}-\delta_{kj}\delta_{lt})+\frac{x_lx_jx_kx_t-x_kx_jx_lx_t}{x_{n+1}^4}\right.$$

$$\left.+\frac{\delta_{kt}x_lx_j+\delta_{lj}x_kx_t-\delta_{kj}x_lx_t-\delta_{lt}x_kx_j}{x_{n+1}^2}\right]$$

$$=\frac{1}{a^4}\left[(\delta_{lj}x_kx_s-\delta_{kj}x_lx_s)+\frac{1}{x_{n+1}^2}\left(x_kx_sx_lx_j+\delta_{lj}x_kx_s\sum_{t=1}^{n}x_t^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\delta_{kj}x_sx_t\sum_{t=1}^{n}x_t^2-x_lx_sx_kx_j\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a^4}\left[(\delta_{lj}x_kx_s-\delta_{kj}x_lx_s)+\frac{1}{x_{n+1}^2}(\delta_{lj}x_kx_s-\delta_{kj}x_sx_l)(a^2-x_{n+1}^2)\right]$$

$$=\frac{\delta_{lj}x_kx_s-\delta_{kj}x_sx_l}{a^2x_{n+1}^2}. \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{lj}^{s}-\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma_{kj}^{s}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{x_s}{a^2}\left(\delta_{lj}+\frac{x_lx_j}{x_{n+1}^2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\frac{x_s}{a^2}\left(\delta_{kj}+\frac{x_kx_j}{x_{n+1}^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}(\delta_{ks}\delta_{lj}-\delta_{ls}\delta_{kj})+\frac{\delta_{ks}x_lx_j+\delta_{kl}x_sx_j+\delta_{kj}x_sx_l}{a^2x_{n+1}^2}$$

$$-\frac{\delta_{ls}x_kx_j+\delta_{lk}x_sx_j+\delta_{lj}x_sx_k}{a^2x_{n+1}^2}+\frac{2x_lx_jx_sx_k}{a^2x_{n+1}^4}-\frac{2x_sx_kx_jx_l}{a^2x_{n+1}^4}$$

$$=\frac{1}{a^2}(\delta_{ks}\delta_{lj}-\delta_{ls}\delta_{kj})+\frac{\delta_{ks}x_lx_j+\delta_{kj}x_sx_l-\delta_{ls}x_kx_j-\delta_{lj}x_sx_k}{a^2x_{n+1}^2}. \tag{2.8}$$

$$R_{jkl}^{s}=\sum_{t=1}^{n}(\Gamma_{lj}^{t}\Gamma_{kt}^{s}-\Gamma_{kj}^{t}\Gamma_{lt}^{s})+\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{lj}^{s}-\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma_{kj}^{s}$$

$$=\frac{\delta_{lj}x_kx_s-\delta_{kj}x_sx_l}{a^2x_{n+1}^2}+\frac{1}{a^2}(\delta_{ks}\delta_{lj}-\delta_{ls}\delta_{kj})+$$

$$\frac{\delta_{ks}x_l x_j + \delta_{kj}x_s x_l - \delta_{ls}x_k x_j - \delta_{lj}x_s x_k}{a^2 x_{n+1}^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\delta_{ks}\left(\delta_{lj} + \frac{x_l x_j}{x_{n+1}^2}\right) - \delta_{ls}\left(\delta_{kj} + \frac{x_k x_j}{x_{n+1}^2}\right)\right]. \tag{2.9}$$

$$R_{ijkl} = \sum_{s=1}^{n} g_{is}R_{jkl}^{s} = \frac{1}{a^2}\sum_{s=1}^{n} g_{is}(\delta_{ks}g_{lj} - \delta_{ls}g_{kj})$$

$$= \frac{1}{a^2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{2.10}$$

所以 $S^n(a)$ 的截面曲率 $K\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \equiv \frac{1}{a^2}$，故 $S^n(a)$ 是常曲率流形.

例 3 设 $M^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid x_n > 0\}$ 是 R^n 的上半空间，M^n 的度量定义为

$$g = \frac{1}{cx_n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i \tag{3.1}$$

其中 $c > 0$，求 (M^n, g) 的截面曲率.

方法 1: 由式(3.1)得

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{cx_n^2}, g^{ij} = cx_n^2\delta^{ij}, \tag{3.2}$$

则

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} cx_n^2\delta^{kr}\,\frac{-2\delta_{rj}\delta_{in} - 2\delta_{ri}\delta_{jn} + 2\delta_{ij}\delta_{rn}}{cx_n^3}$$

$$= \frac{1}{x_n}(\delta_{ij}\delta_{kn} - \delta_{ki}\delta_{jn} - \delta_{kj}\delta_{in}). \tag{3.3}$$

$$\sum_{t=1}^{n}(\Gamma_{lj}^{t}\Gamma_{kt}^{s} - \Gamma_{kj}^{t}\Gamma_{lt}^{s})$$

$$= \frac{1}{x_n^2}\sum_{t=1}^{n}[(\delta_{lj}\delta_{tn} - \delta_{tj}\delta_{ln} - \delta_{tl}\delta_{jn})(\delta_{kt}\delta_{sn} - \delta_{st}\delta_{kn} - \delta_{sk}\delta_{tn})$$
$$- (\delta_{kj}\delta_{tn} - \delta_{tj}\delta_{kn} - \delta_{tk}\delta_{jn})(\delta_{lt}\delta_{sn} - \delta_{st}\delta_{ln} - \delta_{sl}\delta_{tn})]$$

$$= \frac{1}{x_n^2}[(\delta_{kj}\delta_{sl} - \delta_{lj}\delta_{sk}) + (\delta_{lj}\delta_{sn} - \delta_{sl}\delta_{jn})\delta_{kn} + (\delta_{sk}\delta_{jn} - \delta_{kj}\delta_{sn})\delta_{ln}], \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{lj}^s - \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma_{kj}^s \\
&= \frac{1}{x_n^2}[-(\delta_{lj}\delta_{sn} - \delta_{sj}\delta_{ln} - \delta_{sl}\delta_{jn})\delta_{kn} + (\delta_{kj}\delta_{sn} - \delta_{sj}\delta_{kn} - \delta_{sk}\delta_{jn})\delta_{ln}] \\
&= \frac{1}{x_n^2}[-(\delta_{lj}\delta_{sn} - \delta_{sl}\delta_{jn})\delta_{kn} + (\delta_{kj}\delta_{sn} - \delta_{sk}\delta_{jn})\delta_{ln}].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
R_{jkl}^s &= \sum_{t=1}^n (\Gamma_{lj}^t\Gamma_{kt}^s - \Gamma_{kj}^t\Gamma_{lt}^s) + \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{lj}^s - \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma_{kj}^s \\
&= \frac{1}{x_n^2}(\delta_{kj}\delta_{sl} - \delta_{lj}\delta_{sk}),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \sum_{s=1}^n g_{is}R_{jkl}^s = \sum_{s=1}^n \frac{1}{cx_n^4}\delta_{is}(\delta_{kj}\delta_{sl} - \delta_{lj}\delta_{sk}) \\
&= -\frac{1}{cx_n^4}(\delta_{ik}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{il}) = -c(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

所以(R^n,g)的截面曲率$K\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -c$是负常数.

方法 2:由式(3.1)得

$$g_{ij} = \frac{1}{cx_n^2}\delta_{ij} \tag{3.8}$$

其中 $c>0, g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$,令

$$e_i = \sqrt{c}x_n \frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1,\cdots,n \tag{3.9}$$

则有 $g(e_i,e_j) = g\left(\sqrt{c}x_n \frac{\partial}{\partial x_i},\sqrt{c}x_n \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = cx_n^2 g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$,

故 $e_1,\cdots,e_n$ 是R^n 上的标准正交基向量场,对偶为

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{c}x_n}\mathrm{d}x_i,\quad i = 1,\cdots,n \tag{3.10}$$

令

$$\omega_{ij} = \sqrt{c}(\omega_i\delta_{nj} - \omega_j\delta_{ni}) \tag{3.11}$$

即 $\omega_{ij}=0, i,j\neq n, \omega_{in}=\sqrt{c}\omega_i=\frac{1}{x_n}\mathrm{d}x_n=-\omega_{ni}$，得 $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$，所以 ω_{ij} 是 M^n 上的联络形式，从而 ω_i 和 ω_{ij} 满足 Riemann 流形的第一、第二结构方程，即

$$(1)\ \mathrm{d}\omega_i=\frac{1}{\sqrt{c}}d\left(\frac{1}{x_n}\right)\wedge dx_i=-\frac{1}{\sqrt{c}x_n^2}dx_n\wedge dx_i$$

$$=\sqrt{c}\omega_i\wedge\omega_n=\omega_{in}\wedge\omega_n=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\wedge\omega_j$$

$$(2)\ \Omega_{ij}=\mathrm{d}\omega_{ij}-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}$$

$$=\sqrt{c}\delta_{nj}\mathrm{d}\omega_i-\sqrt{c}\delta_{ni}\mathrm{d}\omega_j-c\sum_k(\omega_i\delta_{nk}-\omega_k\delta_{ni})$$

$$\wedge(\omega_k\delta_{nj}-\omega_j\delta_{nk})$$

$$=c\delta_{nj}\omega_i\wedge\omega_n-c\delta_{ni}\omega_j\wedge\omega_n-c\delta_{nj}\omega_i\wedge\omega_n+c\omega_i\wedge$$

$$\omega_j-c\delta_{ni}\omega_n\wedge\omega_j$$

$$=c\omega_i\wedge\omega_j=-c[-\omega_i\wedge\omega_j]$$

由定理 2.6.5 知，(M^n,g) 的截面曲率 $K(e_i,e_j)=-C$ 是负常数.

注 在例 3 中，当 $c=1, n=2$ 时，$g_{ij}=\frac{1}{x_2^2}\delta_{ij}$，易得 $g^{11}=g^{22}=x_2^2, g^{12}=g^{21}=0$，由式(2.6.19)得

$$\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\Gamma_{22}^2=-\frac{1}{x_2}, \Gamma_{11}^2=\frac{1}{x_2},$$

$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{22}^1=\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=0.$$

由式(2.6.21)得

$R_{1212}=-g_{11}\frac{\partial\Gamma_{12}^1}{\partial x_2}=-\frac{1}{x_2^4}$，又 $g_{11}=g_{22}=\frac{1}{x_2^2}, g_{12}=0$，所以 (M^2,g) 的截面曲率

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\right)=\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\frac{-\frac{1}{x_2^4}}{\frac{1}{x_2^4}}=-1.$$

定义 2.6.3 完备的、单连通的常曲率 Riemann 流形 $M^n(c)$

称为空间形式.

上面例 1、例 2、例 3 给出的 Riemann 流形都是空间形式.

注 1 R^3 中的 R^2 是完备的单连通的常曲率为 0 的 Riemann 流形,R^2 是空间形式.

注 2 R^3 中的圆柱面 $M^2 = S^1 \times R^1$ 是常曲率为 0 的 Riemann 流形,度量为 R^3 中的诱导度量,但 M^2 不是单连通的(过它上任一点的闭曲线不能连续收缩到该点),所以圆柱面不是空间形式.

2.7 Riemann 流形的 Ricci 曲率和数量曲率

1. Ricci 曲率

定义 2.7.1 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是黎曼流形(M^n,g)的局部坐标域 V 上的标准正交切标架场,Ricci 曲率张量场 S 是映射:

$$S:C^\infty(M;T(M)) \times C^\infty(M;T(M)) \to C^\infty(M;R),$$

$$S(X,Y) \triangleq \sum_j R(X,e_j,Y,e_j), \qquad (2.7.1)$$

显然 $S(X,Y)=S(Y,X)$,且 S 是双线性映射,即 S 是M 上的二阶对称协变张量场.

定义 2.7.2 设 $X\in C^\infty(M;T(M))$,

(1) $$\mathrm{Ric}(X)=S(X,X) \qquad (2.7.2)$$

称为关于切方向 X 的 Ricci 曲率.

(2) 在(M^n,g)上 p 点

$$\mathrm{Ric}(X)(p) = \sum_j R(X,e_j,X,e_j)(p) \qquad (2.7.3)$$

称为 p 点关于切方向 X_p 的 Ricci 曲率.

定理 2.7.1 Riemann 流形(M^n,g)上的 Ricci 曲率张量场与标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 的选取无关.

证明:设 $\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n$ 是 V 上的另一组标准正交切标架场,并且

$$\bar{e}_i = \sum_j a_{ij}e_j,\ i = 1,2,\cdots,n \qquad (1)$$

其中 $A=(a_{ij})$是 n 阶正交矩阵,即

$$AA' = A'A = I_n;\ \sum_k a_{ik}a_{jk} = \sum_k a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{2}$$

由式(1)和式(2)及定义 2.7.1 得

$$\sum_j R(X,\bar{e}_j,Y,\bar{e}_j) = \sum_j R\left(X,\sum_k a_{jk}e_k,Y,\sum_l a_{jl}e_l\right)$$
$$= \sum_{k,l}\sum_j a_{jk}a_{jl}R(X,e_k,Y,e_k) = \sum_j R(X,e_j,Y,e_j).$$

设$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$是局部 V 上的坐标切标架场,对偶为 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$;设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 上的标准正交切标架场,对偶为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$. 令

$$S_{ik}=S\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_k}\right),R_{ik}=S(e_i,e_k), \tag{2.7.4}$$

由于 S 是M^n 上的(0,2)型张量场,所以

$$S = \sum_{i,k}S_{ik}\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_k;\ S = \sum_{i,k}R_{ik}\omega_i \otimes \omega_k. \tag{2.7.5}$$

若 $X = \sum_i X^i e_i, Y = \sum_k Y^k e_k$, 由于 S 是双线性的,那么

$$S(X,Y) = \sum_{i,k}R_{ik}X^iY^k. \tag{2.7.6}$$

引理 2.7.1 设 $g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$,$(g^{ij})$是$(g_{ij})$的逆矩阵,若 V 上的两组基$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$与$\{e_i\}$之间的关系是 $e_i = \sum_j a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$, 则

$$g^{ij} = \sum_k a_{ki}a_{kj} \tag{2.7.7}$$

证明: 设 $A=(a_{ij}),G=(g_{ij}),G^{-1}=(g^{ij})$, 因为 $\delta_{ij} = g(e_i,e_j) = g\left(\sum_k a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k},\sum_l a_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \sum_{k,l}a_{ik}g_{kl}a_{jl}$ 即 $AGA' = I_n$,故 $G^{-1}=A'A$,所以 $g^{ij} = \sum_k a_{ki}a_{kj}$.

定理 2.7.2 局部 V 上,设 $R_{ijkl}=R\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_l}\right)$,则

$$S_{ik} = \sum_{j,l} g^{jl} R_{ijkl} = \sum_{j,l} g^{jl} R_{jilk} \tag{2.7.8}$$

特别当$\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$时,式(2.7.8)为

$$R_{ik} = \sum_j R_{ijkj} = \sum_j R(e_i, e_j, e_k, e_j) \tag{2.7.9}$$

证明:由定义 2.7.1 及式(2.7.4)和引理 2.7.1 得

$$\begin{aligned} S_{ik} &= S\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \sum_j R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, e_j, \frac{\partial}{\partial x_k}, e_j\right) \\ &= \sum_j R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_m a_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_l a_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \\ &= \sum_{l,m} \sum_j a_{jm} a_{jl} R_{imkl} = \sum_{l,m} g^{ml} R_{imkl} \\ &= \sum_{j,l} g^{jl} R_{ijkl}. \end{aligned}$$

由定义 2.7.2 和定理 2.7.2 得

定理 2.7.3 沿坐标切方向$\frac{\partial}{\partial x_i}$及 e_i 和任意切方向 X 的 Ricci 曲率的局部表示式分别为

(1) $$\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j,k} g^{jk} R_{ijik}, \tag{2.7.10}$$

(2) $$\mathrm{Ric}(e_i) = R_{ii} = \sum_j R_{ijij} = \sum_{j \neq i} R_{ijij}, \tag{2.7.11}$$

(3) $$\mathrm{Ric}(X) = \sum_{i,k} R_{ik} X^i X^k. \tag{2.7.12}$$

其中 $X = \sum_i X^i e_i$.

注 当(M^n, g)是常曲率为 c 的流形时,由式(2.6.16)得

$$\mathrm{Ric}(e_i) = R_{ii} = (n-1)c \tag{2.7.13}$$

2. Einstein 流形

定义 2.7.3 Riemann 流形(M^n, g)称为 Einstein 流形,若存在常数 $\bar{C}$,使对任 $X, Y \in C^\infty(M; T(M))$,有

$$S(X, Y) = \bar{c} g(X, Y) \tag{2.7.14}$$

即 $S_{ij}=\bar{c}g_{ij}$或$S=\bar{c}g$.

注 设 $X=\sum_i X^i e_i$, 由于 $g(X,e_j)=g\left(\sum_i X^i e_i, e_j\right)=X^j$, 即 X^j 是 X 在 e_j 上的投影,所以

$$X=\sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)e_i \tag{2.7.15}$$

定理 2.7.4 设(M^n,g)是常曲率为 c 的 Riemann 流形,则(M^n,g)是 Einstein 流形.

证明:由式(2.6.8)、式(2.7.15)及定义 2.7.1 得

$$\begin{aligned}
S(X,Y) &= \sum_j R(X,e_j,Y,e_j) \\
&= c\sum_j [g(X,Y)g(e_j,e_j)-g(X,e_j)g(Y,e_j)] \\
&= ncg(X,Y)-cg(X,Y)=(n-1)cg(X,Y) \\
&\triangleq \bar{c}g(X,Y),
\end{aligned}$$

其中 $\bar{c}=(n-1)c$ 是常数,所以(M^n,g)是 Einstein 流形.

注 由式(2.7.8)及式(2.6.15)得

$$S_{jl}=\sum_{i,k} g^{ik}R_{ijkl},\ S_{jl;h}=\sum_{i,k} g^{ik}R_{ijkl;h} \tag{2.7.16}$$

定理 2.7.5 设(M^n,g)是 n 维连通的 Riemann 流形,$n\geqslant 3$,如果

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y) \tag{2.7.17}$$

其中 λ 是M^n 上的 C^∞ 函数,则 λ 必为常数,从而(M^n,g)是 Einstein 流形.

证明:由式(2.7.17)得

$$S_{ij}=\lambda g_{ij},\ S_{ij}=S\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right),\ g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

所以

$$S_{ij;h}=\lambda_{;h}g_{ij}+\lambda g_{ij;h}=\lambda_{;h}g_{ij},$$

$$\lambda_{;h}\delta_i^l=\sum_j \lambda_{;h}g_{ij}g^{jl}=\sum_j S_{ij;h}g^{jl},$$

又第二 Bianchi 恒等式为

$$R_{ijkl;h}+R_{ijlh;k}+R_{ijhk;l}=0.$$

由上式及式(2.7.16)得

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i,j,k,l} g^{jl}g^{ik}(R_{ijkl;h}+R_{ijlh;k}+R_{ijhk;l}) \\ &= \sum_{j,l} g^{jl}S_{jl;h}-\sum_{i,k} g^{ik}S_{ih;k}-\sum_{j,l} g^{jl}S_{jh;l} \\ &= \sum_{j}\lambda_{;h}\delta_j^j-\sum_{k}\lambda_{;k}\delta_h^k-\sum_{l}\delta_{;l}\delta_h^l \\ &= n\lambda_{;h}-\lambda_{;h}-\lambda_{;h}=(n-2)\lambda_{;h},\end{aligned}$$

又因为 $n\geqslant 3$,所以 $\lambda_{;h}=0, h=1,\cdots,n$. 从而 λ 为常数. 又 M^n 连通,故 λ 在 M^n 上是常数.

定理 2.7.6 设(M^3,g)是三维 Einstein 流形,则(M^3,g)必是常曲率的 Riemann 流形.

证明:依题设,存在常数 $\bar{c}$,使

$$S(X,Y)=\bar{c}g(X,Y) \tag{1}$$

取标准正交基 e_1,e_2,e_3,设 π 为 $T_P(M)$的任一截平面,并设 π 由 e_1,e_2 张成:$\pi=L(e_1,e_2)$

因为

$$R_{11}=S(e_1,e_1)=\sum_{j=1}^{3}R_{1j1j}=R_{1212}+R_{1313}, \tag{2}$$

$$R_{22}=R_{2121}+R_{2323}=R_{1212}+R_{2323}, \tag{3}$$

$$R_{33}=R_{3131}+R_{3232}=R_{1313}+R_{2323}, \tag{4}$$

由式(1)得

$$R_{11}=\bar{c}g_{11}=\bar{c}, R_{22}=R_{33}=\bar{c}, \tag{5}$$

式(2)+式(3)+式(4)得

$$2R_{1212}=R_{11}+R_{22}-R_{33}=\bar{c}.$$

所以截面曲率 $K(e_1,e_2)=R_{1212}=\dfrac{\bar{c}}{2}$是常数.

推论 2.7.1 设(M^3,g)是三维 Einstein 流形,且对任何单位向量 $e\in T_P(M)$,有

$$0<c<S(e,e)<2c(\text{或 } 2c<S(e,e)<c<0)$$

则 (M^3,g) 是正(负)常曲率的 Riemann 流形.

证明:由定理 2.7.6 中的式子得

$$K(e_1,e_2)=\frac{1}{2}[S(e_1,e_1)+S(e_2,e_2)-S(e_3,e_3)]$$
$$=\frac{1}{2}(R_{11}+R_{22}-R_{33})>\frac{1}{2}(c+c-2c)=0.$$

对另一情形,同理可证.

3. 数量曲率

定义 2.7.4 Riemann 流形 (M^n,g) 的数量曲率 r 由下式定义:

$$r\triangleq\sum_i R_{ii}=\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}R_{ijij}, \tag{2.7.18}$$

其中 $\sum_i R_{ii}=\mathrm{tr}(R_{ij})$, $R_{ijij}=R(e_i,e_j,e_i,e_j)$.

注 (M^n,g) 上的标准化(单位)的 Ricci 曲率和数量曲率分别是

$$R_{ii}=\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}R_{ijij}, \tag{2.7.19}$$

$$r=\frac{1}{n}\sum_i R_{ii}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}R_{ijij}, \tag{2.7.20}$$

同定理 2.7.1 的证明可得,

定理 2.7.7 (M^n,g) 上的数量曲率 r 与标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 的选取无关.

定理 2.7.8 设 V 是 (M^n,g) 的局部坐标域, $\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ 是 V 上的坐标标架场, $e_1,\cdots,e_n$ 是标准正交标架场. 设 $e_i=\sum_j a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$, 则数量曲率 r 在坐标基下的分量表示式为:

$$r=\sum_{i,j,k,l}g^{ik}g^{jl}R_{ijkl}=\sum_{i,k}g^{ik}S_{ik}, \tag{2.7.21}$$

其中 $g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, $R_{ijkl}=R\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_l}\right)$, (g^{ij}) 为

(g_{ij})的逆.

证明:由式(2.7.18)、式(2.7.7)和式(2.7.8)得

$$\begin{aligned} r &= \sum_{m,h} R(e_m, e_h, e_m, e_h) \\ &= \sum_{m,h} R\left(\sum_i a_{mi}\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j a_{hj}\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_k a_{mk}\frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_l a_{hl}\frac{\partial}{\partial x_l}\right) \\ &= \sum_{i,j,k,l}\sum_m a_{mi}a_{mk}\sum_h a_{hj}a_{hl}R_{ijkl} \\ &= \sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{jl}R_{ijkl} = \sum_{i,k} g^{ik}S_{ik}. \end{aligned}$$

注 在式(2.7.21)中,当$\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$时,就是式(2.7.18).

注 当(M^n, g)是常曲率为c的流形时,由式(2.7.13)得

$$r = n(n-1)c. \tag{2.7.22}$$

习 题 二

1. 设(M^n, g)是n维黎曼流形,证明 Schwarz 不等式成立:

$$g^2(X,Y) \leqslant g(X,X)g(Y,Y),$$

其中$X, Y \in C^\infty(M;T(M))$.

2. 设$M^2 = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 > 0\}$,令

$$g = \frac{1}{x_2^2}[\mathrm{d}x_1 \otimes \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2 \otimes \mathrm{d}x_2],$$

证明(M^2, g)是二维黎曼流形.

3. 设∇是微分流形M^n上的线性联络,证明第二 Bianchi 恒等式成立:

$$(\nabla_Z R)(X,Y)W + (\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + R(T(X,Y),Z)W + R(T(Y,Z),X)W + R(T(Z,X),Y)W = 0.$$

4. 设(M^n, g)是 Riemann 流形,对式(2.4.6)外微分并利用式(2.4.7)证明第一 Bianchi 恒等式成立:

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.$$

5. 设(M^n, g)是 Riemann 流形,对第二结构方程 $\Omega_{ij} = \mathrm{d}\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l$ 外微分,证明第二 Bianchi 恒等式成立:

$$R_{ijkl;h} + R_{ijlh;k} + R_{ijhk;l} = 0.$$

6. 设(M^n, g)是 n 维 Riemann 流形, V 是局部坐标域, $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 上的标准正交标架场,对偶为 $\omega_1, \cdots, \omega_n$.

(1) 证明(M^n, g)的体积元素 $\mathrm{d}V = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ 是正交变换下的不变量.

(2) 设$\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$是 V 的坐标标架场,对偶为 $\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n$, $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$,证明

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

7. 设 $T = \sum_{i,j} t^i_j e_i \otimes \omega_j$ 是(1,1)型张量场,证明

$$t^i_{j;kl} - t^i_{j;lk} = \sum_m t^m_j R_{mikl} + \sum_m t^i_m R_{mjkl}.$$

8. 设 $M^n = R^n, g = \frac{1}{A^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i$, 其中 $A = 1 + \frac{c}{4}\sum_{i=1}^n x_i^2$,证明$(M^n, g)$是常曲率为$c$ 的 Riemann 流形.

9. 设 R^{n+1}的子集为

$$M^n = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{n+1}^2 = c \right\},$$

其中 $c < 0, x_{n+1} > 0, I: M^n \to R^{n+1}$ 为包含映射,R^{n+1} 的度量为 $\tilde{g} = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i - \mathrm{d}x_{n+1} \otimes \mathrm{d}x_{n+1}$,令 $g = I^* \tilde{g}$,求(M^n, g)的截面曲率.

提示与答案: $g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2}$, $g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{x_i x_j}{c}$, $\Gamma^k_{ij} =$

$-\frac{1}{c}\left(\frac{x_i x_j x_k}{x_{n+1}^2}-\delta_{ij}x_k\right)$, $R_{jkl}^s=\frac{1}{c}(\delta_{lj}\delta_{ks}-\delta_{jk}\delta_{ls})-\frac{\delta_{ks}x_l x_j-\delta_{ls}x_k x_j}{cx_{n+1}^2}$, $R_{ijkl}=\frac{1}{c}(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$. 当 $n=1$ 时，$M^1=\{x=(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_2=\sqrt{x_1^2-c}\}$是 R^2 上的双曲线的一部分，当 $n=2$ 时，$M^2=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1^2+x_2^2-x_3^2=c\}$，它是 R^3 中的旋转双叶双曲面的一部分，它们都是负常曲率为 $c(c<0)$的 Riemann 流形.

10. 证明定理 2.7.7.

11. 利用局部坐标系，证明定理 2.1.2.

12. 证明定理 2.1.3 和定理 2.1.4.

13. 设 e 是(R^n,g)中固定的单位向量，

$S^{n-2}=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n \mid g(x,e)=0$且 $g(x,x)=1\}$，$K(e,x)$是 e，x 构成的平面截面曲率，试证

$$\frac{n-1}{\mathrm{Vol}(S^{n-2})}\int_{S^{n-2}}K(e,x)\mathrm{d}v=\mathrm{Ric}(e).$$

其中 $\mathrm{Vol}(S^{n-2})$是 S^{n-2}的体积.

14. 设 $S^{n-1}=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n \mid g(x,x)=1\}$是 R^n 中的单位球面，试证

$$\frac{n}{\mathrm{Vol}(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}}\mathrm{Ric}(x)\mathrm{d}v=r.$$

15. 设(M^n,g_1)和(M^n,g_2)是两个 Riemann 流形. 其中 $g_1=\sum_i \mathrm{d}\theta^2$，$g_2=e^{2u}g_1=\sum_i \omega_i^2$，且 $u\in C^\infty(M^n;R)$试证新旧度量下的数量曲率 r 和 $\bar{r}$ 的关系是

$$\bar{r}=e^{2u}[r-(n-2)(n-1)|Du|^2-2(n-1)\Delta u],$$

其中 $|Du|^2=\sum_j u_j^2$，$Du=\mathrm{d}u=\sum_j u_j\theta_j$，$\Delta u=\sum_k u_{kk}$.

提示：由 $\omega_i=e^{2u}\theta_i$，$i=1,\cdots,n$ 可证出 $\omega_{ij}=u_i\theta_j-u_j\theta_i+\theta_{ij}$，然后再求 $\bar{R}_{ijkl}$与 R_{ijkl}之间的关系.

第三章　黎曼子流形

本章我们先讨论黎曼子流形的基本理论,然后研究各种子流形的几何.

3.1　子流形的诱导联络与第二基本形式

设 M^n 是浸入在$(n+p)$维微分流形 N^{n+p}中的一个n 维微分流形,其中 $p\geqslant 1$,由于以下讨论是局部的,故可以假设 M^n 是一个嵌入子流形.

设 N 由坐标域$\{W;y_A\}$所覆盖,M 由坐标域$\{V;x_i\}$所覆盖,这里及以后,指标范围规定为 $1\leqslant A, B, C,\cdots,\leqslant n+p$; $1\leqslant i, j, k,\cdots,\leqslant n$; $n+1\leqslant \alpha,\beta,\cdots,\leqslant n+p$, 于是子流形 M^n 可以局部地表示为

$$y_A=y_A(x_1,\cdots,x_n)\quad A=1,2,\cdots,n+p \tag{3.1.1}$$

或记为 $y=y(x)$, 其中 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_{n+p})$.

下面我们把 M^n 上的向量场和它们的微分映射像恒同起来,也就是说,如果 $F:M\to N$ 是浸入,且 X 是M 上的一个向量场,我们恒同 X 和$F_*(X)$,即 $F_*(X)=X$. 这样,如果 X 是M 上的一个向量场,那么 X 在M 中和N 中的局部表达式分别为

$$X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.1.2}$$

和

$$X=\sum_A\left(\sum_i X^i\frac{\partial y_A}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_A}. \tag{3.1.3}$$

定义 3.1.1　设 X 是M 上的一个向量场,N 上的一个向量场$\overline{X}$ 称为X 的扩张,如果它满足

$$\overline{X}\Big|_M = X \tag{3.1.4}$$

现在设$(N^{n+p},\bar{g})$是一个 Riemann 流形，对于 M^n 上的任意向量场X 和 Y，定义 M^n 上的度量g 为

$$g(X,Y)=\tilde{g}\ (\overline{X},\ \overline{Y}) \tag{3.1.5}$$

则称 g 为M^n 上的诱导度量，这时(M^n,g)是$(N^{n+p},\ \bar{g})$的 Riemann 子流形.

定义 3.1.2 设 $p\in M^n$，$\xi_p\in T_p(N)$，如果对任意的 $X_p\in T_p(M)$，有

$$\bar{g}_p(X_p,\xi_p)=0, \tag{3.1.6}$$

则称 ξ_P 为M^n 上P 点的一个法向量.

设 $T^{\perp}(M)$表示 M 在N 中的法向量丛，则有

$$T(N)\Big|_M = T(M)\oplus T^{\perp}(M) \tag{3.1.7}$$

其中$\oplus$表示直和.

设$\widetilde{\nabla}$是 N 的相对于 Riemann 度量 $\tilde{g}$ 的 Riemann 联络，由于$\widetilde{\nabla}$是无挠的，故

$$\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}-\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}-[\overline{X},\overline{Y}]=0 \tag{3.1.8}$$

又 $\bar{\nabla}$ 是度量联络，故

$$\bar{\nabla}_{\overline{X}}\bar{g}(\overline{Y},\ \overline{Z})=\bar{g}(\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\ \overline{Z})+\bar{g}(\overline{Y},\ \bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}) \tag{3.1.9}$$

其中 $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}\in C^{\infty}(N;T(N))$；$\bar{\nabla}_{\overline{X}}\bar{g}(\overline{Y},\overline{Z})=\overline{X}\bar{g}(\overline{Y},\overline{Z})$.

为了给出 Riemann 子流形(M^n,g)的诱导联络 ∇和第二基本形式h 的定义，我们需要以下两个引理.

引理 3.1.1 设 $X,Y\in C^{\infty}(M;T(M))$，$\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是 X 和 Y 的扩张，则$[\overline{X},\overline{Y}]\Big|_M$ 不依赖于X 和 Y 的扩张，即

$$[\overline{X},\overline{Y}]\Big|_M=[X,Y]. \tag{3.1.10}$$

证明:设 $\overline{X}=\sum_A \overline{X}^A \frac{\partial}{\partial y_A}$,$\overline{Y}=\sum_B \overline{Y}^B \frac{\partial}{\partial y_B}$,由式(3.1.3)知

$X=\sum_A\left(\sum_i X^i \frac{\partial y_A}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_A}$,$Y=\sum_B\left(\sum_j Y^j \frac{\partial y_B}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial y_B}$. 从而 $\overline{X}\Big|_M = X$ 和 $\overline{Y}\Big|_M = Y$ 等价于

$$\overline{X}^A\Big|_{y=y(x)}=\sum_i X^i \frac{\partial y_A}{\partial x_i},\quad \overline{Y}^B\Big|_{y=y(x)}=\sum_j Y^j \frac{\partial y_B}{\partial x_j}. \tag{3.1.11}$$

设

$$[\overline{X},\overline{Y}]=\sum_A[\overline{X},\overline{Y}]^A\frac{\partial}{\partial y_A},$$

$$[X,Y]=\sum_A\sum_j[X,Y]^j\frac{\partial y_A}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_A}$$

其中$[\overline{X},\overline{Y}]^A$ 是$[\overline{X},\overline{Y}]$的第 A 个分量,现只需证明

$$[\overline{X},\overline{Y}]^A\Big|_{y=y(x)}=\sum_j[X,Y]^j\frac{\partial y_A}{\partial x_j}.$$

事实上:由定理 1.4.5 的式(2)得

$$[\overline{X},\overline{Y}]^A\Big|_{y=y(x)}=\sum_B\left(\overline{X}^B\frac{\partial \overline{Y}^A}{\partial y_B}-\overline{Y}^B\frac{\partial \overline{X}^A}{\partial y_B}\right)\Big|_{y=y(x)}$$

$$=\sum_B\sum_i\left(X^i\frac{\partial y_B}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{Y}^A}{\partial y_B}-Y^i\frac{\partial y_B}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{X}^A}{\partial y_B}\right)\Big|_{y=y(x)}$$

$$=\sum_{i,j}\left[X^i\frac{\partial}{\partial x}\left(Y^j\frac{\partial y_A}{\partial x_j}\right)-Y^i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(X^j\frac{\partial y_A}{\partial x_j}\right)\right]$$

$$=\sum_j\sum_i\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x_i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial y_A}{\partial x_j}=\sum_j[X,Y]^j\frac{\partial y_A}{\partial x_j}.$$

引理 3.1.2 设 $X,Y\in C^\infty(M;T(M))$,$\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是 X 和 Y 的扩张,则

(1) $$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\,|_M=\overline{\nabla}_X Y \tag{3.1.12}$$

(2) $$\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h(X,Y) \tag{3.1.13}$$

其中 ∇ 是 M 上相对于 g 的 Riemann 联络，$h(X,Y)$ 是 M 上的一个法向量场，$h(X,Y)=h(Y,X)$，且 h 是双线性映射.

证明：(1) 设 $\overline{X}=\sum\limits_{A}\overline{X}^{A}\frac{\partial}{\partial y_{A}},\overline{Y}=\sum\limits_{B}\overline{Y}^{B}\frac{\partial}{\partial y_{B}}$，由式(3.1.3)得 $X=\sum\limits_{A}\left(\sum\limits_{i}X^{i}\frac{\partial y_{A}}{\partial x_{i}}\right)\frac{\partial}{\partial y_{A}},Y=\sum\limits_{B}\left(\sum\limits_{j}Y^{j}\frac{\partial y_{B}}{\partial x_{j}}\right)\frac{\partial}{\partial y_{B}}$，由式(3.1.11)及式(1.2.12)得

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\Big|_{M}&=\sum_{A,C}\overline{X}^{A}\left(\frac{\partial\overline{Y}^{C}}{\partial y_{A}}+\sum_{B}\Gamma_{AB}^{C}\overline{Y}^{B}\right)\frac{\partial}{\partial y_{C}}\Big|_{y=y(x)}\\&=\sum_{A,C}\sum_{i}X^{i}\frac{\partial y_{A}}{\partial x_{i}}\left[\frac{\partial}{\partial y_{A}}\left(\sum_{j}Y^{j}\frac{\partial y_{C}}{\partial x_{j}}\right)+\sum_{B}\sum_{j}\Gamma_{AB}^{C}Y^{j}\frac{\partial y_{B}}{\partial x_{j}}\right]\frac{\partial}{\partial y_{C}}\\&=\overline{\nabla}_{X}Y.\end{aligned}$$

(2) 由式(3.1.7)知，$\overline{\nabla}_{X}Y$ 可以写成以下形式

$$\overline{\nabla}_{X}Y=\nabla_{X}Y+h(X,Y)\text{或}h(X,Y)=\overline{\nabla}_{X}Y-\nabla_{X}Y.$$

其中 $\nabla_{X}Y$ 是 M 上的切向量场，$h(X,Y)$ 是 M 上的法向量场. 设 $f_1,f_2\in C^{\infty}(M;R)$，因 $\overline{\nabla}$ 是线性联络，所以

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{f_1X}f_2Y&=f_1\ \overline{\nabla}_{X}f_2Y=f_1\{(Xf_2)Y+f_2(\overline{\nabla}_{X}Y)\}\\&=\{f_1(Xf_2)Y+f_1f_2(\nabla_{X}Y)+f_1f_2h(X,Y)\},\end{aligned}$$

又 $\overline{\nabla}_{f_1X}f_2Y=\nabla_{f_1X}f_2Y+h(f_1X,f_2Y)$，于是有

$$\nabla_{f_1X}f_2Y=f_1(Xf_2)Y+f_1f_2\ \nabla_{X}Y,\qquad(3.1.14)$$

$$h(f_1X,f_2Y)=f_1f_2h(X,Y).\qquad(3.1.15)$$

式(3.1.14)表示 ∇ 是 M 上的线性联络，又因为

$$h(X_1+X_2,Y)=\overline{\nabla}_{X_1+X_2}Y-\nabla_{X_1+X_2}Y$$

$$=\overline{\nabla}_{X_1}Y-\nabla_{X_1}Y+\overline{\nabla}_{X_2}Y-\nabla_{X_2}Y=h(X_1,Y)+h(X_2,Y),$$ 再

由式(3.1.15)知，h 是双线性映射，又因为 $\overline{\nabla}$ 是无挠的，从引理3.1.1得

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X Y + h(X, Y) - \nabla_Y X - h(Y, X) - [X, Y]. \end{aligned}$$

利用切部和法部分别为零,得

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \tag{3.1.16}$$

$$h(X, Y) = h(Y, X). \tag{3.1.17}$$

于是式(3.1.16)表示 ∇是无挠的,式(3.1.17)表示 h 是对称的,进一步,因为 $\overline{\nabla}$是度量联络,所以有

$$\begin{aligned} \nabla_X g(Y, Z) &= \overline{\nabla}_X \overline{g}(Y, Z) \\ &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \overline{g}(Y, \overline{\nabla}_X Z) \\ &= \overline{g}(\nabla_X Y + h(X, Y), Z) + \overline{g}(Y, \nabla_X Z + h(X, Z)) \\ &= \overline{g}(\nabla_X Y, Z) + \overline{g}(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

式(3.1.18)表示 ∇ 是度量联络,以上说明 ∇是诱导度量 g 的 Riemann 联络.

定义 3.1.3 由式(3.1.13)定义的 Riemann 联络 ∇ 称为黎曼子流形 M^n 的诱导联络,式(3.1.13)称为黎曼子流形 M^n 的 Gauss 公式;(1,2)型张量场 h 称为子流形 M^n 的第二基本形式.

注 $h(X, Y)$是 M^n 上的(1,0)型张量场,即是一个法向量场.

设 ξ 是M 上的一个法向量场,即 $\xi \in C^\infty(M; T^\perp(M))$,$X$ 是 M 上的一个切向量场,我们可以将 $\overline{\nabla}_X \xi$ 作如下分解

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi \triangleq (\overline{\nabla}_X \xi)^T + (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp \tag{3.1.19}$$

其中 $-A_\xi(X)$和 $\nabla_X^\perp \xi$ 分别是$\overline{\nabla}_X \xi$ 的切部与法部. 方程式(3.1.19)称为黎曼子流形 M^n 的 Weingarten 公式.

引理 3.1.3 设 $X; Y \in C^\infty(M; T(M))$,$\xi \in C^\infty(M; T^\perp(M))$ 则

(1) $A_\xi(X)$关于 ξ 和 X 是双线性的,且在 $p \in M$ 点,$A_\xi(X)$

仅依赖于 ξ_p 和 X_p.

(2) $g(A_\xi(X), Y) = \bar{g}(h(X, Y), \xi)$. $\quad$ (3.1.20)

证明:(1) 设 $f_1, f_2 \in C^\infty(M;R)$,因为 $\bar{\nabla}$ 是线性联络,所以从式(3.1.19)得

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{f_1 X} f_2 \xi &= f_1 \ \bar{\nabla}_X f_2 \xi = f_1(Xf_2)\xi + f_1 f_2 \bar{\nabla}_X \xi \\ &= f_1(Xf_2)\xi - f_1 f_2 A_\xi(X) + f_1 f_2 \ \nabla_X^\perp \xi.\end{aligned}$$

又

$$\bar{\nabla}_{f_1 X} f_2 \xi = -A_{f_2 \xi}(f_1 X) + \nabla_{f_1 X}^\perp f_2 \xi,$$

所以有

$$A_{f_2 \xi}(f_1 X) = f_1 f_2 A_\xi(X), \quad (3.1.21)$$

$$\nabla_{f_1 X}^\perp f_2 \xi = f_1(Xf_2)\xi + f_1 f_2 \ \nabla_X^\perp \xi. \quad (3.1.22)$$

设 $\eta \in C^\infty(M; T^\perp(M))$,由式(3.1.19)得

$$\bar{\nabla}_X(\xi + \eta) = \bar{\nabla}_X \xi + \bar{\nabla}_X \eta = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi - A_\eta(X) + \nabla_X^\perp \eta$$

又

$$\bar{\nabla}_X(\xi + \eta) = -A_{\xi + \eta}(X) + \nabla_X^\perp(\xi + \eta),$$

所以有

$$A_{\xi + \eta}(X) = A_\xi(X) + A_\eta(X), \quad (3.1.23)$$

$$\nabla_X^\perp(\xi + \eta) = \nabla_X^\perp \xi + \nabla_X^\perp \eta. \quad (3.1.24)$$

同理可得

$$A_\xi(X + Y) = A_\xi(X) + A_\xi(Y), \quad (3.1.25)$$

$$\nabla_{X+Y}^\perp \xi = \nabla_X^\perp \xi + \nabla_Y^\perp \xi. \quad (3.1.26)$$

式(3.1.23)和式(3.1.25)表示 $A_\xi(X)$ 关于 ξ 和 X 是双线性的.

(2) 因为 $\bar{g}(Y, \xi) = 0$,且 $\bar{\nabla}$ 是度量联络,所以我们有

$$\begin{aligned}0 &= \bar{\nabla}_X \bar{g}(Y, \xi) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \xi) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X \xi) \\ &= \bar{g}(\nabla_X Y + h(X, Y), \xi) + \bar{g}(Y, -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi) \\ &= \bar{g}(h(X, Y), \xi) - \bar{g}(Y, A_\xi(X))\end{aligned}$$

$$= \bar{g}(h(X,Y),\xi) - g(A_\xi(X),Y),$$

因此式(3.1.20)成立.

引理 3.1.4　$\nabla^\perp$是 $T^\perp(M)$上的度量联络.

证明:由式(3.1.22)、式(3.1.24)和式(3.1.26)知, $\nabla^\perp$是 M 的法丛 $T^\perp(M)$上的线性联络,设 $\xi,\eta\in C^\infty(M;T^\perp(M))$,则

$$\bar{\nabla}_X\xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp\xi,\ \bar{\nabla}_X\eta = -A\eta(X) + \nabla_X^\perp\eta,$$

从而

$$\bar{g}(\nabla_X^\perp\xi,\eta) + \bar{g}(\xi,\nabla_X^\perp\eta) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X\xi,\eta) + \bar{g}(\xi,\bar{\nabla}_X\eta)$$

$$= \bar{\nabla}_X\bar{g}(\xi,\eta) = X\bar{g}(\xi,\eta) = \nabla_X^\perp\bar{g}(\xi,\eta),$$

因此 $\nabla^\perp$是 $T^\perp(M)$上的度量联络.

注　$\nabla_\xi^\perp X$ 无意义,所以不能定义 $\nabla^\perp$的无挠性.

下面我们给出子流形 M^n 的第二基本形式 h 和切映射 A_ξ 的局部表示式.

设 $e_1,\cdots,e_{n+p}$是 N^{n+p}中的标准正交切标架场,使它们限制到 M^n 上时,$e_1,\cdots,e_n$ 是 M^n 的切向量场,$e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$是 M^n 的法向量场,又设 $\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$是其对偶,则 M^n 的第二基本形式是

$$h(X,Y) = \sum_\alpha \bar{g}(h(X,Y),e_\alpha)e_\alpha \triangleq \sum_\alpha h^\alpha(X,Y)e_\alpha. \tag{3.1.27}$$

其中分量函数 $h^\alpha(X,Y) = \bar{g}(h(X,Y),e_\alpha)$,$h^\alpha$ 是(0,2)型张量场,设 $h^\alpha(e_i,e_j) = h_{ij}^\alpha$,即 $\bar{g}(h(e_i,e_j),e_\alpha) = h_{ij}^\alpha$,则

$$h^\alpha = \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha\omega_i \otimes \omega_j,\ h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \tag{3.1.28}$$

再由式(3.1.27)得

$$h(e_i,e_j) = \sum_\alpha h^\alpha(e_i,e_j)e_\alpha = \sum_\alpha h_{ij}^\alpha e_\alpha, \tag{3.1.29}$$

所以 h 的局部表示式为

$$h = \sum_\alpha \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \omega_i \otimes \omega_j \otimes e_\alpha. \tag{3.1.30}$$

令

$$\sigma = \left|h\right|^2 = \sum_{i,j}\bar{g}(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j))$$
$$= \sum_{\alpha}\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2 = \sum_{\alpha}\mathrm{tr}H_{\alpha}^2, \tag{3.1.31}$$

其中 $\mathrm{tr}H_{\alpha}$ 表示矩阵 $H_{\alpha}=(h_{ij}^{\alpha})$ 的迹，σ 称为 M^n 上的第二基本形式模长的平方.

若 $X = \sum_i X^i e_i, Y = \sum_j Y^j e_j$ 是 M^n 上的任意两个切向量场，由于 h 是双线性的，则

$$h(X,Y) = \sum_{\alpha}(\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}X^iY^j)e_{\alpha}. \tag{3.1.32}$$

由式(3.1.29)、式(3.1.20)及式(3.1.13)我们得第二基本量 h_{ij}^{α} 的三种表示式：

$$h_{ij}^{\alpha} = \bar{g}(h(e_i,e_j),e_{\alpha}) = g(A_{e_{\alpha}}(e_i),e_j) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}e_j,e_{\alpha}) \tag{3.1.33}$$

由式(3.1.33)得切向量场 $A_{e_{\alpha}}(e_i)$ 的局部表示为

$$A_{e_{\alpha}}(e_i) = \sum_j h_{ij}^{\alpha}e_j \tag{3.1.34}$$

注 当 $p=1$ 时，$h(X,Y) = h^{n+1}(X,Y)e_{n+1}, h(e_i,e_j) = h_{ij}^{n+1}e_{n+1} \triangleq h_{ij}e_{n+1}, h = \sum_{i,j}h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j \otimes e_{n+1}, \sigma = \sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1})^2$.

注 第二基本形式 h 是(1,2)型张量场，第二基本形式 $h(X,Y)$ 是(1,0)型张量场，也是 M^n 上的法向量场.

3.2 子流形的 Gauss 方程、Codazzi 方程和 Ricci 方程

设 (M^n,g) 是 $(N^{n+p},\bar{g})$ 的 Riemann 子流形，N^{n+p} 的曲率张量场 K 为

$$K(\overline{Z},\overline{W})\overline{Y} = \bar{\nabla}_{\overline{Z}}\bar{\nabla}_{\overline{W}}\overline{Y} - \bar{\nabla}_{\overline{W}}\bar{\nabla}_{\overline{Z}}\overline{Y} - \bar{\nabla}_{[\overline{Z},\overline{W}]}\overline{Y}$$

其中 $\overline{Y},\overline{Z},\overline{W} \in C^{\infty}(N;T(N))$，设 $Y,Z,W \in C^{\infty}(M;T(M))$，从式(3.1.10)及式(3.1.12)两式，我们有

$$K(Z,W)Y=\bar{\nabla}_Z\bar{\nabla}_W Y-\bar{\nabla}_W\bar{\nabla}_Z Y-\bar{\nabla}_{[Z,W]}Y \tag{3.2.1}$$

于是由 Gauss 公式(3.1.13)和 Weingarten 公式(3.1.19)得

$$\begin{aligned}
K(Z,W)Y &= \bar{\nabla}_Z(\bar{\nabla}_W Y+h(W,Y))-\bar{\nabla}_W(\nabla_Z Y+h(Z,Y)) \\
&\quad -(\nabla_{[Z,W]}Y+h([Z,W],Y)) \\
&= \nabla_Z\nabla_W Y+h(Z,\nabla_W Y)+\bar{\nabla}_Z h(W,Y)-\nabla_W\nabla_Z Y \\
&\quad -h(W,\nabla_Z Y)-\bar{\nabla}_W h(Z,Y)-\nabla_{[Z,W]}Y \\
&\quad -h([Z,W],Y) \\
&= R(Z,W)Y+\bar{\nabla}_Z h(W,Y)-\bar{\nabla}_W h(Z,Y) \\
&\quad +h(Z,\nabla_W Y)-h(W,\nabla_Z Y)-h(\nabla_Z W,Y)+h(\nabla_W Z, \\
&\quad Y) \\
&= R(Z,W)Y-A_{h(W,Y)}(Z)+A_{h(Z,Y)}(W)+ \\
&\quad \nabla_Z^{\perp}h(W,Y)-\nabla_W^{\perp}h(Y,Z)+h(Z,\nabla_W Y)+h(\nabla_W Z, \\
&\quad Y)-h(W,\nabla_Z Y)-h(\nabla_Z W,Y)
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

其中 R 是 M 上的曲率张量场.

1. Gauss 方程

我们知道,N^{n+p}和子流形 M^n 上的张量场 K 和 R 分别是

$$K(X,Y,Z,W)=\bar{g}(X,K(Z,W)Y) \tag{3.2.3}$$

和

$$R(X,Y,Z,W)=g(X,R(Z,W)Y). \tag{3.2.4}$$

由式(3.2.2)、式(3.2.3)、式(3.2.4)和式(3.1.20),对任意切向量场 X,有

$$\begin{aligned}
&K(X,Y,Z,W)=\bar{g}(X,K(Z,W)Y) \\
&=R(X,Y,Z,W)-g(X,A_{h(W,Y)}(Z))+g(X,A_{h(Z,Y)}(W)) \\
&=R(X,Y,Z,W)-\bar{g}(h(X,Z),h(W,Y))+\bar{g}(h(X,W),h(Y,Z)),
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W)=K(X,Y,Z,W)&+\bar{g}(h(X,Z),h(Y,W)) \\
&-\bar{g}(h(X,W),h(Y,Z)),
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

方程式(3.2.5)叫 Riemann 子流形 M^n 的 Gauss 方程.

局部上,在标准正交基 $e_1,\cdots,e_{n+p}$ 下,Gauss 方程式(3.2.5)等价于

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl} &= K_{ijkl} + \bar{g}\Big(\sum_\alpha h_{ik}^\alpha e_\alpha, \sum_\beta h_{jl}^\beta e_\beta\Big) - \bar{g}\Big(\sum_\alpha h_{il}^\alpha e_\alpha, \sum_\beta h_{jk}^\beta e_\beta\Big) \\
&= K_{ijkl} + \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha). \qquad (3.2.6)
\end{aligned}
$$

当 N^{n+p} 是常曲率为 C 的 Riemann 流形时,式(3.2.5)和式(3.2.6)分别是

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = C[\bar{g}(X,Z)\bar{g}(Y,W) - \bar{g}(X,W)\bar{g}(Y,Z)] \\
+\bar{g}(h(X,Z),h(Y,W)) - \bar{g}(h(X,W), \\
h(Y,Z)) \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

和

$$
R_{ijkl} = C(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha). \qquad (3.2.8)
$$

例 设 M^2 是三维欧氏空间 R^3 中的曲面,M^2 上一点的两个主曲率 k_1 和 k_2 的乘积称为 M^2 在该点的 Gauss 曲率,记为 K,K 就是截面曲率,这时 M^2 的 Gauss 方程是

$$
R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}. \qquad (3.2.9)
$$

其中 $R_{ijkl} = R\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_l}\right)$,$M^2$ 的 Gauss 曲率为

$$
K\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \qquad (3.2.10)
$$

2. Codazzi 方程

从式(3.2.2)知,$K(Z,W)Y$ 的法部为

$$
\begin{aligned}
(K(Z,W)Y)^\perp = \nabla_Z^\perp h(W,Y) - h(\nabla_Z W,Y) - h(W,\nabla_Z Y) \\
- \nabla_W^\perp h(Z,Y) + h(\nabla_W Z,Y) + h(Z,\nabla_W Y) \\
\triangleq (\bar{\nabla}_Z h)(W,Y) - (\bar{\nabla}_W h)(Z,Y) \qquad (3.2.11)
\end{aligned}
$$

式(3.2.11)是向量场的相等,其中定义了

$$(\bar{\nabla}_Z h)(W,Y) = \nabla_Z^{\perp} h(W,Y) - h(\nabla_Z W, Y) - h(W, \nabla_Z Y) \tag{3.2.12}$$

$\bar{\nabla}_Z h$ 称为 h 关于切方向 Z 的协变导数，方程式(3.2.11)称为子流形 M^n 的 Codazzi 方程.

式(3.2.11)等价于：对任 $\xi \in C^\infty(M; T^\perp(M))$，有

$$\begin{aligned} K(\xi, Y, Z, W) &= \bar{g}(\xi, (K(Z,W)Y)^\perp) \\ &= \bar{g}(\xi, (\bar{\nabla}_Z h)(W,Y)) - \bar{g}(\xi, (\bar{\nabla}_W h)(Z,Y)), \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

式(3.2.13)是函数的相等，由于

$$h = \sum_\alpha \sum_{j,k} h_{jk}^\alpha w_j \otimes w_k \otimes e_\alpha$$

是(1,2)型张量场，所以 h 沿 e_i 的协变导数为

$$\bar{\nabla}_{e_i} h = \sum_\alpha \sum_{j,k} h_{jki}^\alpha w_j \otimes w_k \otimes e_\alpha \tag{3.2.14}$$

其中 $h_{jki}^\alpha = h_{jk;i}^\alpha$ 是 h_{jk}^α 沿 e_i 的协变导数，由(3.2.14)式得

$$(\bar{\nabla}_{e_i} h)(e_j, e_k) = \sum_\alpha h_{jki}^\alpha e_\alpha, \tag{3.2.15}$$

从而 Codazzi 方程式(3.2.13)的局部表达式为

$$\begin{aligned} K_{\alpha ijk} &= K(e_\alpha, e_i, e_j, e_k) \\ &= \bar{g}(e_\alpha, (\bar{\nabla}_{e_j} h)(e_k, e_i)) - \bar{g}(e_\alpha, (\bar{\nabla}_{e_k} h)(e_j, e_i)) \\ &= \bar{g}(e_\alpha, \sum_\beta h_{kij}^\beta e_\beta) - \bar{g}(e_\alpha, \sum_\beta h_{jik}^\beta e_\beta) \\ &= h_{kij}^\alpha - h_{jik}^\alpha. \end{aligned}$$

因 $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$，得 $h_{ijk}^\alpha = h_{jik}^\alpha$，所以 Codazzi 方程为

$$h_{ijk}^\alpha - h_{ikj}^\alpha = -K_{\alpha ijk}, \tag{3.2.16}$$

当 N^{n+p} 是常曲率为 C 的 Riemann 流形时，$K(\xi, Y, Z, W) = 0$，由式(3.2.13)得到，Codazzi 方程为

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z), \tag{3.2.17}$$

局部上，式(3.2.17)等价于

$$h^{\alpha}_{ijk} = h^{\alpha}_{ikj}. \tag{3.2.18}$$

3. Ricci 方程

设 $\xi, \eta \in C^{\infty}(M; T^{\perp}(M))$，从式(2.2.1)、式(2.1.13)、式(2.1.19)和式(2.1.20)我们得

$$\begin{aligned}
&K(\eta, \xi, X, Y) = \bar{g}(\eta, K(X, Y)\xi) \\
&= \bar{g}(\eta, \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \xi) - \bar{g}(\eta, \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \xi) - \bar{g}(\eta, \bar{\nabla}_{[X,Y]}\xi) \\
&= -\bar{g}(\eta, \bar{\nabla}_X(A_{\xi}(Y))) + \bar{g}(\eta, \bar{\nabla}_X(\nabla^{\perp}_Y \xi)) + \bar{g}(\eta, \bar{\nabla}_Y(A_{\xi}(x))) \\
&\quad - \bar{g}(\eta, \bar{\nabla}_Y(\nabla^{\perp}_X \xi)) + \bar{g}(\eta, A_{\xi}([X, Y])) - \bar{g}(\eta, \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi) \\
&= \bar{g}(\eta, \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi) - \bar{g}(\eta, \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi) - \bar{g}(\eta, \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi) \\
&\quad - \bar{g}(\eta, h(X, A_{\xi}(Y))) + \bar{g}(\eta, h(Y, A_{\xi}(X))) \\
&= \bar{g}(\eta, \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi) \\
&\quad - g(A_{\eta}(X), A_{\xi}(Y)) + g(A_{\eta}(Y), A_{\xi}(X)),
\end{aligned}$$

于是我们令

$$R^{\perp}(X, Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi, \tag{3.2.19}$$

表示 M^n 的法曲率张量场，则

$$\begin{aligned}
&K(\eta, \xi, X, Y) \\
&= R^{\perp}(\eta, \xi, X, Y) - g(A_{\eta}(X), A_{\xi}(Y)) + g(A_{\eta}(Y), A_{\xi}(X)),
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&R^{\perp}(\eta, \xi, X, Y) \\
&= K(\eta, \xi, X, Y) + g(A_{\eta}(X), A_{\xi}(Y)) - g(A_{\eta}(Y), A_{\xi}(X)).
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

方程式(3.2.20)称为子流形 M^n 的 Ricci 方程.

局部上，设 $e_1, \cdots, e_{n+p}$ 是标准正交标架场，则 Ricci 方程式(3.2.20)为

$$\begin{aligned}
R^{\perp}_{\alpha\beta ij} &= R^{\perp}(e_{\alpha}, e_{\beta}, e_i, e_j) \\
&= K_{\alpha\beta ij} + g(A_{e_{\alpha}}(e_i), A_{e_{\beta}}(e_j)) - g(A_{e_{\alpha}}(e_j), A_{e_{\beta}}(e_i)) \\
&= K_{\alpha\beta ij} + g(\sum_k h^{\alpha}_{ik} e_k, \sum_l h^{\beta}_{jl} e_l) - g(\sum_k h^{\alpha}_{jk} e_k, \sum_l h^{\beta}_{il} e_l)
\end{aligned}$$

$$= K_{\alpha\beta ij} + \sum_k (h_{ik}^{\alpha} h_{jk}^{\beta} - h_{jk}^{\alpha} h_{ik}^{\beta}), \tag{3.2.21}$$

当 N^{n+p}是常曲率为 c 的流形时，$K(\eta,\xi,X,Y)=0$，从而 Ricci 方程式(3.2.20)和式(3.2.21)分别为

$$R^{\perp}(\eta,\xi,X,Y) = g(A_{\eta}(X),A_{\xi}(Y)) - g(A_{\eta}(Y),A_{\xi}(X)) \tag{3.2.22}$$

和

$$R_{\alpha\beta ij}^{\perp} = \sum_k (h_{ik}^{\alpha} h_{jk}^{\beta} - h_{jk}^{\alpha} h_{ik}^{\beta}). \tag{3.2.23}$$

3.3 活动标架法

在这一节，我们将用正交标架法讨论前两节的内容，目的是让读者熟悉这一套由 E. Cartan 创造的并由陈省身先生发扬光大的方法，它使用起来非常方便，通过后面的学习，将会有更深的体会.

我们要用到 Cartan 引理，为此先介绍该引理

引理 3.3.1 (Cartan)设 $\omega_1,\cdots,\omega_s$ 和 $\bar{\omega}_1,\cdots,\bar{\omega}_s$ 是微分流形 M^n 上的两组(0,1)型张量场，如果 $\sum\limits_{i=1}^{s} \omega_i \wedge \bar{\omega}_i = 0$，并且 $\omega_1,\cdots,\omega_s$ 线性无关，则

$$\bar{\omega}_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\omega_j, j = 1,\cdots,s.\ a_{ij} = a_{ji}, \tag{3.3.1}$$

其中 $a_{ij} \in C^{\infty}(M;\ R)$.

证明：因为 $\omega_1,\cdots,\omega_s$ 线性无关，所以可扩充成 $\wedge^1(M^n)$的一组基：$\omega_1,\cdots,\omega_s,\omega_{s+1},\cdots,\omega_n$，又 $\bar{\omega}_i \in \wedge^1(M^n)$所以

$$\bar{\omega}_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\omega_j + \sum_{k=s+1}^{n} a_{ik}\omega_k,$$

从而

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \omega_i \wedge \bar{\omega}_i = \sum_{i=1}^{s} \omega_i \wedge \left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\omega_j + \sum_{k=s+1}^{n} a_{ik}\omega_k\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=s+1}^{n} a_{ik}\omega_i \wedge \omega_k$$

$$= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant s} (a_{ij} - a_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=s+1}^{n} a_{ik} \omega_i \wedge \omega_k,$$

因$\{\omega_i \wedge \omega_j | 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$是$\wedge^2(M^n)$的基,所以 $a_{ij} - a_{ji} = 0$ 且 $a_{ik} = 0$,

从而 $\overline{\omega_i} = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \omega_j$ 且 $a_{ij} = a_{ji}$.

注 Gartan 引理对于(1,0)型张量场 $X_1, \cdots, X_s$ 和 $\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_s$ 亦成立:若 $\sum_{i=1}^{s} X_i \wedge \overline{X}_i = 0$ 且 $X_i, \cdots, X_s$ 线性无关,则

$$\overline{X}_i = \sum_{j=1}^{s} a^{ij} X_j, i = 1, \cdots, s. \ a^{ij} = a^{ji}. \tag{3.3.2}$$

1. 子流形 M^n 的 Gauss 方程、Codazzi 方程及 Ricci 方程

现在设(M^n, g)是$(N^{n+p}, \bar{g})$的 Riemann 子流形,在 N 中选取局部标准正交标架场 $e_1, \cdots, e_{n+p}$,使得它们限制到 M 上时,$e_1, \cdots, e_n$ 是 M 的切标架场,$e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$是 M 的法标架场,相对于这个标架场,设 $\omega_1, \cdots, \omega_{n+p}$是其对偶,即 $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$,则 N^{n+p} 的结构方程是

$$d\omega_A = \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \tag{3.3.3}$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \Omega_{AB}^N, \tag{3.3.4}$$

其中

$$\Omega_{AB}^N = -\frac{1}{2} \sum_{C,D} K_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D, \tag{3.3.5}$$

K_{ABCD}是N^{n+p}的(0,4)型曲率张量场的分量,现在及今后约定指标的取值范围如下:

$1 \leqslant A, B, C, \cdots, \leqslant n + p; 1 \leqslant i, j, k, \cdots, \leqslant n; n + 1 \leqslant \alpha, \beta, \cdots, \leqslant n + p$.

现在将 $\omega_1, \cdots, \omega_{n+p}$限制到$M^n$ 上,由于 $\omega_\alpha(e_1) = \cdots = \omega_\alpha(e_n) = 0$,于是有

$$\omega_\alpha = 0, \ \alpha = n + 1, \cdots, n + p, \tag{3.3.6}$$

外微分式(3.3.6)得

$$0 = d\omega_\alpha = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta = -\sum_i \omega_{i\alpha} \wedge \omega_i .$$

由 Cartan 引理 3.3.1 得

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j \overline{h}^\alpha_{ij}\omega_j, \overline{h}^\alpha_{ij} = \overline{h}^\alpha_{ji}, \tag{3.3.7}$$

此处 $\overline{h}^\alpha_{ij}$ 就是式(3.1.33)中的第二基本量 h^α_{ij},即

$$\overline{h}^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ij}. \tag{3.3.8}$$

事实上:由式(3.3.7)得 $\overline{h}^\alpha_{ij} = \omega_{i\alpha}(e_j)$,并且由式(3.1.19)、式(2.4.8)和式(2.4.9)可得

$$\begin{aligned} A_{e_\alpha}(e_i) &= -(\bar{\nabla}_{e_i} e_\alpha)^T = -[(De_\alpha)(e_i)]^T \\ &= -[(\sum_B \omega_{\alpha B} \otimes e_B)(e_i)]^T = -\sum_j \omega_{\alpha j}(e_i)e_j \\ &= \sum_j \overline{h}^\alpha_{ji} e_j = \sum_j \overline{h}^\alpha_{ij} e_j , \end{aligned}$$

又由式(3.1.34)得 $A_{e_\alpha}(e_i) = \sum_j h^\alpha_{ij} e_j$,所以 $\overline{h}^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ij}$.

注 第二基本量就是联络系数,即

$$h^\alpha_{ij} = \Gamma^\alpha_{ij}. \tag{3.3.9}$$

事实上:因 $\omega_{i\alpha} = \sum_A \Gamma^\alpha_{Ai}\omega_A$,限制到 M^n 上,有 $\omega_{i\alpha} = \sum_j \Gamma^\alpha_{ji}\omega_j$,与式(3.3.7)比较得 $h^\alpha_{ij} = \Gamma^\alpha_{ij}$

由式(3.3.3)及式(3.3.6)得

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j + \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_\alpha \\ &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j , \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

故(ω_{ij})是子流形 M^n 的联络矩阵. 式(3.3.10)称为 M^n 的第一结构方程. 从式(3.3.4)我们有

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} + \Omega^N_{ij}, \tag{3.3.11}$$

$$d\omega_{i\alpha} = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{j\alpha} + \sum_\beta \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} + \Omega^N_{i\alpha}, \tag{3.3.12}$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta} + \sum_\gamma \omega_{\alpha r} \wedge \omega_{r\beta} + \Omega^N_{\alpha\beta}. \tag{3.3.13}$$

定义 3.3.1 (1) 二次微分形式

$$\Omega_{ij}^{M} = \mathrm{d}\omega_{ij} - \sum_{k}\omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\,\omega_k \wedge \omega_l. \tag{3.3.14}$$

称为子流形 M^n 的切丛上的曲率形式.

(2) 二次微分形式

$$\Omega_{\alpha\beta}^{\perp} = \mathrm{d}\omega_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma}\omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}R_{\alpha\beta ij}^{\perp}\omega_i \wedge \omega_j \tag{3.3.15}$$

称为子流形 M^n 的法丛上的曲率形式.

由式(3.3.11)、式(3.3.14)和式(3.3.7),我们有

$$\begin{aligned}
-\sum_{k<l}R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l &= -\sum_{\alpha}\sum_{k,l}h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha}\omega_k \wedge \omega_l - \sum_{k<l}K_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l \\
&= -\sum_{k<l}\Big[K_{ijkl} + \sum_{\alpha}(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha})\Big]\omega_k \wedge \omega_l
\end{aligned}$$

从而得到子流形 M^n 的 Gauss 方程为

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} + \sum_{\alpha}(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}). \tag{3.3.16}$$

由式(2.4.11)得 h_{ij}^{α}的协变导数h_{ijk}^{α}为

$$\sum_{k}h_{ijk}^{\alpha}\omega_k = \mathrm{d}h_{ij}^{\alpha} + \sum_{k}h_{kj}^{\alpha}\omega_{ki} + \sum_{k}h_{ik}^{\alpha}\omega_{kj} + \sum_{\beta}h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}. \tag{3.3.17}$$

由式(3.3.7)及式(3.3.8)得

$$\omega_{i\alpha} - \sum_{j}h_{ij}^{\alpha}\omega_j = 0. \tag{3.3.18}$$

对式(3.3.18)外微分并由式(3.3.10)、式(3.3.12)和式(3.3.17)得

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}\omega_{i\alpha} - \sum_{j}\mathrm{d}h_{ij}^{\alpha} \wedge \omega_j - \sum_{j}h_{ij}^{\alpha}\mathrm{d}\omega_j \\
&= \sum_{j}\omega_{ij} \wedge \omega_{j\alpha} + \sum_{\beta}\omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} + \Omega_{i\alpha}^{N} - \sum_{j,k}h_{ijk}^{\alpha}\omega_k \wedge \omega_j \\
&\quad + \sum_{j,k}h_{kj}^{\alpha}\omega_{ki} \wedge \omega_j + \sum_{j,k}h_{ik}^{\alpha}\omega_{kj} \wedge \omega_j \\
&\quad + \sum_{\beta}\sum_{j}h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta\alpha} \wedge \omega_j - \sum_{j,k}h_{ij}^{\alpha}\omega_{jk} \wedge \omega_k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j<k} [h^{\alpha}_{ijk} - h^{\alpha}_{ikj} - K_{i\alpha jk}]\omega_j \wedge \omega_k.$$

从而得到子流形 M^n 的 Codazzi 方程为

$$h^{\alpha}_{ijk} - h^{\alpha}_{ikj} = -K_{\alpha ijk} \tag{3.3.19}$$

从式(3.3.13)、式(3.3.15)及式(3.3.18),我们有

$$\begin{aligned} -\sum_{i<j} R^{\perp}_{\alpha\beta ij}\omega_i \wedge \omega_j &= \sum_k \omega_{\alpha k} \wedge \omega_{k\beta} + \Omega^N_{\alpha\beta} \\ &= -\sum_{i,j,k} h^{\alpha}_{ki}h^{\beta}_{kj}\omega_i \wedge \omega_j - \sum_{i<j} K_{\alpha\beta ij}\omega_i \wedge \omega_j \\ &= -\sum_{i<j}[K_{\alpha\beta ij} + \sum_k (h^{\alpha}_{ki}h^{\beta}_{kj} - h^{\alpha}_{kj}h^{\beta}_{ki})]\omega_i \wedge \omega_j, \end{aligned}$$

从而我们得到子流形 M^n 的 Ricci 方程为

$$R^{\perp}_{\alpha\beta ij} = K_{\alpha\beta ij} + \sum_k (h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{jk} - h^{\alpha}_{jk}h^{\beta}_{ik}). \tag{3.3.20}$$

注 式(3.3.11)、式(3.3.12)、式(3.3.13)分别是 M^n 的 Gauss 方程、Codazzi 方程和 Ricci 方程.

定义 3.3.2 (1) $\mathrm{I} \triangleq ds^2 = \sum_i \omega_i^2$ 称为子流形 M^n 的第一基本形式(度量形式).

(2) $\mathrm{II} = \sum_{\alpha}\sum_{i,j} h^{\alpha}_{ij}\omega_i \otimes \omega_j \otimes e_{\alpha}$ 称为子流形 M^n 的第二基本形式(这与前面的定义是一致的).

2. 第二基本量 h^{α}_{ij} 的 Laplacian Δh^{α}_{ij}

由 2.4 节知,h^{α}_{ij} 的二阶协变导数 h^{α}_{ijkl} 如下:

$$\begin{aligned} \sum_l h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l = dh^{\alpha}_{ijk} &+ \sum_l h^{\alpha}_{ljk}\omega_{li} + \sum_l h^{\alpha}_{ilk}\omega_{lj} \\ &+ \sum_l h^{\alpha}_{ijl}\omega_{lk} + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ijk}\omega_{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

对式(3.3.17)外微分,利用式(3.3.21)及子流形 M^n 的结构方程得:

$$\begin{aligned} &\sum_k dh^{\alpha}_{ijk} \wedge \omega_k + \sum_k h^{\alpha}_{ijk} d\omega_k \\ &= \sum_k dh^{\alpha}_{kj} \wedge \omega_{ki} + \sum_k h^{\alpha}_{kj} d\omega_{ki} + \sum_k dh^{\alpha}_{ik} \wedge \omega_{kj} \\ &\quad + \sum_k h^{\alpha}_{ik} d\omega_{kj} + \sum_{\beta} dh^{\beta}_{ij} \wedge \omega_{\beta\alpha} + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij} d\omega_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

即

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k,l} h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k - \sum_{k,l} h^{\alpha}_{ljk}\omega_{li} \wedge \omega_k - \sum_{,k} h^{\alpha}_{ilk}\omega_{lj} \wedge \omega_k \\
&\quad - \sum_{k,l} h^{\alpha}_{ijl}\omega_{lk} \wedge \omega_k - \sum_{\beta,k} h^{\beta}_{ijk}\omega_{\beta\alpha} \wedge \omega_k + \sum_{k,l} h^{\alpha}_{ijk}\omega_{kl} \wedge \omega_l \\
= &\sum_{k,l} h^{\alpha}_{kjl}\omega_l \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l} h^{\alpha}_{lj}\omega_{lk} \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l} h^{\alpha}_{kl}\omega_{lj} \wedge \omega_{ki} \\
&\quad - \sum_{\beta,k} h^{\beta}_{kj}\omega_{\beta\alpha} \wedge \omega_{ki} + \sum_{k,l} h^{\alpha}_{kj}\omega_{kl} \wedge \omega_{li} - \frac{1}{2}\sum_{k,l,m} h^{\alpha}_{kj}R_{kilm}\omega_l \wedge \omega_m \\
&\quad + \sum_{k,l} h^{\alpha}_{ikl}\omega_l \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l} h^{\alpha}_{lk}\omega_{li} \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l} h^{\alpha}_{il}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj} \\
&\quad - \sum_{\beta,k} h^{\beta}_{ik}\omega_{\beta\alpha} \wedge \omega_{kj} + \sum_{k,l} h^{\alpha}_{ik}\omega_{kl} \wedge \omega_{lj} - \frac{1}{2}\sum_{k,l,m} h^{\alpha}_{ik}R_{kjlm}\omega_l \wedge \omega_m \\
&\quad + \sum_{\beta,k} h^{\beta}_{ijk}\omega_k \wedge \omega_{\beta\alpha} - \sum_{\beta,k} h^{\beta}_{kj}\omega_{ki} \wedge \omega_{\beta\alpha} - \sum_{\beta,k} h^{\beta}_{ik}\omega_{kj} \wedge \omega_{\beta\alpha} \\
&\quad - \sum_{\beta,r} h^{r}_{ij}\omega_{\gamma\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} + \sum_{\beta,r} h^{\beta}_{ij}\omega_{\beta r} \wedge \omega_{r\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{\beta,l,k} h^{\beta}_{ij}R^{\perp}_{\beta\alpha kl}\omega_k \wedge \omega_l,
\end{aligned}
$$

相消后,左面剩一项,右面剩三项,再约去 -1,从而得:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k<l}(h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk})\omega_k \wedge \omega_l \\
= &\sum_{k<l}\Big[\sum_{m}(h^{\alpha}_{mj}R_{mikl} + h^{\alpha}_{im}R_{mjkl}) + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij}R^{\perp}_{\beta\alpha kl}\Big]\omega_k \wedge \omega_l,
\end{aligned}
$$

所以得

$$
h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk} = \sum_{m}(h^{\alpha}_{mj}R_{mikl} + h^{\alpha}_{im}R_{mjkl}) + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij}R^{\perp}_{\beta\alpha kl}. \tag{3.3.22}
$$

由 Codazzi 方程 $h^{\alpha}_{ijk} = h^{\alpha}_{ikj} - K_{\alpha ijk}$ 得 $h^{\alpha}_{ijkk} = h^{\alpha}_{ikjk} - K_{\alpha ijkk}$,再由式(3.3.22)得

$$
\begin{aligned}
\Delta h^{\alpha}_{ij} &= \sum_{k} h^{\alpha}_{ijkk} = \sum_{k}(h^{\alpha}_{ikjk} - K_{\alpha ijkk}) \\
&= \sum_{k}(h^{\alpha}_{ikkj} - K_{\alpha ijkk}) + \sum_{k,m}(h^{\alpha}_{mk}R_{mijk} + h^{\alpha}_{im}R_{mkjk}) \\
&\quad + \sum_{\beta,k} h^{\beta}_{ik}R^{\perp}_{\beta\alpha jk}.
\end{aligned}
$$

又 $h^{\alpha}_{ik} = h^{\alpha}_{ki}$,所以 $h^{\alpha}_{ikk} = h^{\alpha}_{kik} = h^{\alpha}_{kki} - K_{\alpha kik}$,得

$$
\Delta h^{\alpha}_{ij} = \sum_{k}(h^{\alpha}_{kkij} - K_{\alpha kikj} - K_{\alpha ijkk}) + \sum_{\beta,k} h^{\beta}_{ik}R^{\perp}_{\beta\alpha jk}
$$

$$+ \sum_{k,m} (h_{mk}^{\alpha} R_{mijk} + h_{im}^{\alpha} R_{mkjk}) \tag{3.3.23}$$

式(3.3.23)中的 $K_{\alpha kikj}$ 是 $K_{\alpha kik}$ 沿 e_j 方向求导，即

$K_{\alpha kikj} = e_j(K_{\alpha kik})$，由式(3.3.23)得：

$$\sum_{\alpha} \sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} - \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} (K_{\alpha kikj} + K_{\alpha ijkk}) + \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} (h_{mk}^{\alpha} R_{mijk}$$

$$+ h_{im}^{\alpha} R_{mkjk}) + \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} R_{\beta\alpha jk}^{\perp}. \tag{3.3.24}$$

设 N^{n+p} 是常曲率为 C 的流形，得 $K_{\alpha ijk} = 0$，所以 $K_{\alpha ijkl} = e_l(K_{\alpha ijk}) = 0$，记 $H_{\alpha} = (h_{ij}^{\alpha})$，$\mathrm{tr} H_{\alpha} = \sum_i h_{ii}^{\alpha}$，由式(3.2.8)和式(3.2.23)，式(3.3.24)为：

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} \sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} &= \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} R_{\beta\alpha jk}^{\perp} \\
&\quad + \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} (h_{mk}^{\alpha} R_{mijk} + h_{im}^{\alpha} R_{mkjk}) \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} + nc\sigma - c \cdot \sum_{\alpha} (\mathrm{tr} H_{\alpha})^2 \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{tr}(H_{\alpha}^2 H_{\beta}) \mathrm{tr} H_{\beta} - \sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(H_{\alpha} H_{\beta})]^2 \\
&\quad - 2 \sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(H_{\alpha}^2 H_{\beta}^2) - \mathrm{tr}(H_{\alpha} H_{\beta})^2],
\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

而法曲率的那一部分

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} R_{\beta\alpha jk}^{\perp} &= - \sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(H_{\alpha}^2 H_{\beta}^2) - \mathrm{tr}(H_{\alpha} H_{\beta})^2] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{tr}(H_{\alpha} H_{\beta} - H_{\beta} H_{\alpha})^2.
\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

由式(3.3.25)和式(3.3.26)，对任意实数 a，有

$$\sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} - anc\sigma + ac \sum_{\alpha} [\mathrm{tr} H_{\alpha}]^2 - a \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{tr}(H_{\alpha}^2 H_{\beta}) \mathrm{tr} H_{\beta}$$

$$+ a \sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(H_{\alpha} H_{\beta})]^2 - (1 - a) \sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(H_{\alpha}^2 H_{\beta}^2) - \mathrm{tr}(H_{\alpha} H_{\beta})^2]$$

$$+ (1 + a) \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} (h_{mk}^{\alpha} R_{mijk} + h_{im}^{\alpha} R_{mkjk}). \tag{3.3.27}$$

定理 3.3.1 设(M^n,g)是$(N^{n+p},\bar{g})$的 Riemann 子流形，则下列各不等式成立：

(1) $\frac{1}{p}\sigma^2 \leqslant \sum_\alpha [\mathrm{tr} H_\alpha^2]^2 \leqslant \sigma^2.$

(2) $0 \leqslant \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}} [\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) - \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]$

$$\leqslant \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}} (\mathrm{tr} H_\alpha^2)(\mathrm{tr} H_\beta^2) = \sigma^2 - \sum_\alpha [\mathrm{tr} H_\alpha^2]^2.$$

(3) $\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}} [\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) - \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2] \leqslant \frac{p-1}{p}\sigma^2.$

(4) $\sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) - \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2] \leqslant \frac{n}{2}\sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2.$

证明：(1) 因为

$$\mathrm{tr} H_\alpha^2 = \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha h_{ji}^\alpha = \sum_{i,j} (h_{ij}^\alpha)^2 \geqslant 0,$$

由 Schwarz 不等式得

$$\frac{1}{p}\sigma^2 = \frac{1}{p}\Big[\sum_\alpha \mathrm{tr} H_\alpha^2\Big]^2 \leqslant \sum_\alpha [\mathrm{tr} H_\alpha^2]^2 \leqslant \Big[\sum_\alpha \mathrm{tr} H_\alpha^2\Big]^2 = \sigma^2.$$

(2) 由于 $H_\alpha = (h_{ij}^\alpha)$是对称矩阵，所以对固定的 α，令 $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$，又因为

$$(\lambda_i^\alpha - \lambda_k^\alpha) \leqslant 2[(\lambda_i^\alpha)^2 + (\lambda_k^\alpha)^2] \leqslant 2\sum_{j=1}^n (\lambda_j^\alpha)^2, \quad (3.3.28)$$

所以有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) - \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2 \\
&= \sum_{i,j,k,l} (h_{ij}^\alpha h_{jk}^\alpha h_{kl}^\beta h_{li}^\beta - h_{ij}^\alpha h_{jk}^\beta h_{kl}^\alpha h_{li}^\beta) \\
&= \sum_{i,k} (\lambda_i^\alpha \lambda_i^\alpha h_{ik}^\beta h_{ki}^\beta - \lambda_i^\alpha h_{ik}^\beta \lambda_k^\alpha h_{ki}^\beta) \\
&= \sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} [(\lambda_i^\alpha)^2 - (\lambda_i^\alpha)(\lambda_k^\alpha)](h_{ik}^\beta)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} (\lambda_i^\alpha - \lambda_k^\alpha)^2 (h_{ik}^\beta)^2 \\
&\leqslant \sum_{i,k} [(\lambda_i^\alpha)^2 + (\lambda_k^\alpha)^2](h_{ik}^\beta)^2 \leqslant \sum_j (\lambda_j^\alpha)^2 \sum_{i,k} (h_{ik}^\beta)^2 \\
&= (\mathrm{tr} H_\alpha^2)(\mathrm{tr} H_\beta^2).
\end{aligned}$$

两边关于 α、β 求和得

$$0 \leqslant \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2) - \operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}}(\operatorname{tr}H_\alpha^2)(\operatorname{tr}H_\beta^2)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}(\operatorname{tr}H_\alpha^2)(\operatorname{tr}H_\beta^2) - \sum_\alpha[\operatorname{tr}H_\alpha^2]^2$$

$$= \sigma^2 - \sum_\alpha[\operatorname{tr}H_\alpha^2]^2.$$

(3) 由不等式(3.3.25)和式(3.3.24)得:

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2) - \operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2] \leqslant \sigma^2 - \sum_\alpha(\operatorname{tr}H_\alpha^2)^2$$

$$\leqslant \sigma^2 - \frac{1}{p}\sigma^2 = \frac{p-1}{p}\sigma^2.$$

(4) 该不等式称为 Lincoln 不等式,具体证明可参见:*Itoh*, *T*, *J·Math*, *Soc. Japan*, 27(1975),497~506.

3.4 欧氏空间 R^{n+p} 中子流形 M^n 的运动方程

设 $N^{n+p}=R^{n+p}$ 是平坦的欧氏空间,$x:M^n\rightarrow R^{n+p}$ 是浸入子流形,在 R^{n+p} 中取定一个标准正交标架场 $\{0;\delta_1,\cdots,\delta_{n+p}\}$,对于 R^{n+p} 中任意一个与 $\{0;\delta_1,\cdots,\delta_{n+p}\}$ 定向一致的标准正交标架场 $\{x;\ e_1,\cdots,e_{n+p}\}$,则存在惟一的刚体运动把 $\{0;\ \delta_1,\cdots,\delta_{n+p}\}$ 变换到 $\{x;e_1,\cdots,e_{n+p}\}$,其对应关系是

$$x = \sum_A x_A\delta_A,\ e_A = \sum_B a_{AB}\delta_B. \tag{3.4.1}$$

其中 (a_{AB}) 是正交矩阵,x_A 是流形上的函数,x 称为 M^n 的位置向量(x 也可以看成映射). 让标架 $\{x;e_1,\cdots,e_{n+p}\}$ 作一个无穷小运动,则得到 $\{x+\mathrm{d}x;e_1+\mathrm{d}e_1,\cdots,e_{n+p}+de_{n+p}\}$,矢量 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}e_A$ 仍可用标架 $\{x;e_1,\cdots,e_{n+p}\}$ 表示出,设

$$\mathrm{d}x = \sum_A\omega_A\otimes e_A \triangleq \sum_A\omega_A e_A, \tag{3.4.2}$$

$$de_A = \sum_B \omega_{AB} \otimes e_B \triangleq \sum_B \omega_{AB} e_B, \tag{3.4.3}$$

其中 ω_A, ω_{AB}称为活动标架$\{x; e_1, \cdots, e_{n+p}\}$的相对分量．

设 $\delta_A = \sum_B b_{AB} e_B$，由式(3.4.1) 得 $b_{AB} = \bar{g}(\sum_C b_{AC} e_C, e_B)$ $= \bar{g}(\delta_A, e_B) = \bar{g}(\delta_A, \sum_C a_{BC}\delta_C) = a_{BA}$，所以

$$\delta_A = \sum_B a_{BA} e_B. \tag{3.4.4}$$

对 $x = \sum_A x_A \delta_A$ 外微分，并由式(3.4.4) 得

$$dx = \sum_A dx_A \cdot \delta_A = \sum_{A,B} dx_A \cdot a_{BA} e_B = \sum_{A,B} dx_B \cdot a_{AB} e_A.$$

对 $e_A = \sum_C a_{AC}\delta_C$ 外微分，并由式(3.4.4) 得

$$de_A = \sum_C da_{AC} \cdot \delta_C = \sum_{B,C} da_{AC} \cdot a_{BC} e_B.$$

与式(3.4.2)和式(3.4.3)比较得

$$\omega_A = \sum_B dx_B \cdot a_{AB}, \omega_{AB} = \sum_C da_{AC} \cdot a_{BC}. \tag{3.4.5}$$

由于 $\sum_C a_{AC} \cdot a_{BC} = \delta_{AB}$，外微分此式得

$$0 = \sum_C da_{AC} \cdot a_{BC} + \sum_C a_{AC} \cdot da_{BC} = \omega_{AB} + \omega_{BA},$$

即

$$\omega_{AB} + \omega_{BA} = 0. \tag{3.4.6}$$

外微分式(3.4.2)并由式(3.4.3)得

$$\begin{aligned} 0 = d(dx) &= \sum_A d\omega_A e_A - \sum_A \omega_A \wedge de_A \\ &= \sum_A d\omega_A e_A - \sum_{A,B} \omega_A \wedge \omega_{AB} e_B \\ &= \sum_A (d\omega_A - \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B) e_A. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

对式(3.4.3) 外微分，并由式(3.4.3) 得

$$\begin{aligned} 0 = d(de_A) &= \sum_B d\omega_{AB} e_B - \sum_B \omega_{AB} \wedge de_B \\ &= \sum_B d\omega_{AB} e_B - \sum_B \omega_{AB} \wedge \left(\sum_C \omega_{BC} e_C\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_B [\mathrm{d}\omega_{AB} - \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}] e_B \qquad (3.4.8)$$

由式(3.4.7)、式(3.4.6) 及式(3.4.8) 可得 R^{n+p} 的结构方程为

$$\mathrm{d}\omega_A = \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \qquad (3.4.9)$$

$$\mathrm{d}\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}. \qquad (3.4.10)$$

活动标架$\{x; e_1, \cdots, e_{n+p}\}$ 称为子流形 M^n 的 Darboux 标架，由于 Darboux 标架的原点 x 在流形M^n 上，且 e_i 是M^n 在x 点的切向量，所以

$$\mathrm{d}x = \sum_i \omega_i e_i, \omega_\alpha = 0. \qquad (3.4.11)$$

并且 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 线性无关，所以 Darboux 标架的运动方程是

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \sum_i \omega_i e_i \\ \mathrm{d}e_i = \sum_j \omega_{ij} e_j + \sum_\alpha \omega_{i\alpha} e_\alpha \\ \mathrm{d}e_\alpha = \sum_i \omega_{\alpha i} e_i + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} e_\beta, \end{cases} \qquad (3.4.12)$$

其中 ω_A, ω_{AB}满足下面的方程

$$\mathrm{d}\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \qquad (3.4.13)$$

$$0 = \mathrm{d}\omega_\alpha = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i, \qquad (3.4.14)$$

$$\mathrm{d}\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}, \qquad (3.4.15)$$

$$\mathrm{d}\omega_{i\beta} = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{j\beta} + \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha\beta} \qquad (3.4.16)$$

$$\mathrm{d}\omega_{\alpha\beta} = \sum_k \omega_{\alpha k} \wedge \omega_{k\beta} + \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta}. \qquad (3.4.17)$$

由式(3.4.14)及 Cartan 引理 3.3.1 得

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij} \omega_j, h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}. \qquad (3.4.18)$$

由 Riemann 几何学的基本定理知，式(3.4.13) 说明，ω_{ij} 是M^n 上 Riemann 联络的联络形式. M^n 上 Riemann 联络的曲率形式是

$$\Omega_{ij}^{M} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l. \tag{3.4.19}$$

于是由式(3.4.15)、式(3.4.18)和式(3.4.19)得 M^n 的 Gauss 方程是

$$R_{ijkl} = \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha). \tag{3.4.20}$$

由式(3.4.16) 及式(3.4.18) 可得 M^n 的 Codazzi 方程是

$$h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha. \tag{3.4.21}$$

由式(3.4.17)及式(3.4.18)可得 M^n 的 Ricci 方程是

$$R_{\alpha\beta ij}^{\perp} = \sum_k (h_{ik}^\alpha h_{jk}^\beta - h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta). \tag{3.4.22}$$

因 R^{n+p} 的曲率为 0,这与前节讲的公式一致.

定义 3.4.1 (1) 方程式(3.4.12)称为子流形 M^n 的运动方程.

(2) $\mathrm{I} = ds^2 = g(dx, dx) = \sum_i \omega_i^2$ 称为子流形 M^n 的第一基本形式.

(3) $$\mathrm{II} = -\sum_\alpha \tilde{g}(dx, de_\alpha) = \sum_\alpha \left(\sum_i \omega_i \omega_{i\alpha}\right) e_\alpha = \sum_\alpha \left(\sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \omega_i \omega_j\right) e_\alpha$$

称为 M^n 的第二基本形式,它是向量形式,它也可写成张量积的形式.

(4) $dv = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ 称为 M^n 的体积元素.

注 设 M^n 是 R^{n+1} 的超曲面,此时 $p=1$. M^n 的第二基本形式可写为数量形式:

$$\mathrm{II} = -g(dx, de_{n+1}) = \sum_i \omega_i \omega_{in+1} = \sum_{i,j} h_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{3.4.23}$$

以下考虑两种特殊情形:

1. R^3 中的曲面 M^2

设 $x: M^2 \to R^3$ 是 R^3 中的曲面,方程为

$$x = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)).$$

切向量场记为 x_u 和 x_v,即

$$\frac{\partial}{\partial u}=(x_{1u},x_{2u},x_{3u})=x_u,\frac{\partial}{\partial v}=(x_{1v},x_{2v},x_{3v})=x_v.$$

其中 $x_{iu}=\dfrac{\partial x_i}{\partial u},x_{iv}=\dfrac{\partial x_i}{\partial v},i=1,2,3.$ 记 $g_{11}=g(x_u,x_u)=E,g_{12}=g(x_u,x_v)=F,g_{22}=g(x_v,x_v)=G$,这里 g 是曲面 M^2 在$(R^3,\tilde{g})$中的诱导度量.假设参数曲线正交,即 $F=0$.则 M^2 上的单位切向量场为

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{E}}x_u,\quad e_2=\frac{1}{\sqrt{G}}x_v. \tag{3.4.24}$$

由 M^2 的运动方程式(3.4.12)的第一式得

$$\mathrm{d}x=\omega_1e_1+\omega_2e_2=x_u\mathrm{d}u+x_v\mathrm{d}v=\sqrt{E}\mathrm{d}ue_1+\sqrt{G}\mathrm{d}ve_2,$$

所以得

$$\omega_1=\sqrt{E}\mathrm{d}u,\omega_2=\sqrt{G}\mathrm{d}v. \tag{3.4.25}$$

设 $e_3=e_1\times e_2$,则 e_3 是 M^2 的单位法向量场,记 $L=\tilde{g}(x_{uu},e_3)$,$M=\tilde{g}(x_{uv},e_3)$,$N=\tilde{g}(x_{vv},e_3)$,其中 $x_{uu}=(x_{1uu},x_{2uu},x_{3uu})$,由式(3.4.12)的第二式并通过计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e_1&=\omega_{12}e_2+\omega_{13}e_3=(e_1)_u\mathrm{d}u+(e_1)_v\mathrm{d}v\\&=\frac{-E_v\mathrm{d}u+G_u\mathrm{d}v}{2\sqrt{EG}}e_2+\frac{L\mathrm{d}u+M\mathrm{d}v}{\sqrt{E}}e_3.\end{aligned}$$

从而得

$$\omega_{12}=\frac{-E_v\mathrm{d}u+G_u\mathrm{d}v}{2\sqrt{EG}},\omega_{13}=\frac{L\mathrm{d}u+M\mathrm{d}v}{\sqrt{E}}. \tag{3.4.26}$$

同理可得

$$\omega_{23}=\frac{M\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v}{\sqrt{G}},\omega_{AB}+\omega_{BA}=0. \tag{3.4.27}$$

曲面 M^2 的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=g(\mathrm{d}x,\mathrm{d}x)=\omega_1^2+\omega_2^2=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2. \tag{3.4.28}$$

由式(3.4.25)、式(3.4.26)和式(3.4.27),M^2 的第二基本形式是

$$\begin{aligned}\mathrm{II}&=-g(\mathrm{d}x,\mathrm{d}e_3)=h_{11}\omega_1^2+2h_{12}\omega_1\omega_2+h_{22}\omega_2^2\\&=h_{11}E\mathrm{d}u^2+2h_{12}\sqrt{EG}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+h_{22}G\mathrm{d}v^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} \\
&= \sqrt{E}\mathrm{d}u \cdot \frac{L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v}{\sqrt{E}} + \sqrt{G}\mathrm{d}v \cdot \frac{M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v}{\sqrt{G}} \\
&= L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2.
\end{aligned}
$$

从而得

$$
h_{11} = \frac{L}{E}, h_{12} = \frac{M}{\sqrt{EG}}, h_{22} = \frac{N}{G}. \tag{3.4.29}
$$

M^2 的截面曲率 R_{1212}就是 M^2 的 Gauss 曲率 K,故

$$
K = R_{1212} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = \frac{LN - M^2}{EG} \tag{3.4.30}
$$

M^2 的平均曲率为

$$
H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}) = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right). \tag{3.4.31}
$$

M^2 的 Gauss 方程除了式(3.4.30)外,还有以下形式:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} = (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (-h_{21}\omega_1 - h_{22}\omega_2) \\
&= -K\omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned} \tag{3.4.32}
$$

而 $\omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{EG}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$,又根据式(3.4.26),可以计算 $\mathrm{d}\omega_{12}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_{12} &= -\mathrm{d}\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right) \wedge \mathrm{d}u + \mathrm{d}\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right) \wedge \mathrm{d}v \\
&= -\left(\frac{Ev}{2\sqrt{EG}}\right)_v \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u + \left(\frac{Gu}{2\sqrt{EG}}\right)_u \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \\
&= \left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right] \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

从而 Gauss 方程式(3.4.32)等价于

$$
K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right] \tag{3.4.33}
$$

从公式(3.4.33)便可得著名的 Gauss 定理:曲面 M^2 的 Gauss 曲率是内在量,即它只与第一基本量有关.

2. R^3 中的曲线 M^1

设 $x: M^1 \to R^3$ 是 R^3 中的一条曲线，方程为

$$x = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

曲线 M^1 的切向量场记为 x_t，即

$$\frac{\partial}{\partial t} = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t)) = x_t.$$

M^1 的单位切向量场是

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{g(x_t, x_t)}} x_t = \frac{1}{|x_t|} x_t, \tag{3.4.34}$$

在曲线 M^1 上选取单位法向量场：

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{g(e_{1s}, e_{1s})}} e_{1s}, e_3 = e_1 \times e_2. \tag{3.4.35}$$

其中 $e_{1s} = \dfrac{de_1}{ds}$ 是切矢 e_1 关于弧长 s 求导，曲线的弧长是

$$s = \int_a^t \sqrt{g(x_t, x_t)} dt = \int_a^t \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + x'_3(t)^2} dt.$$

所以 $ds = \sqrt{g(x_t, x_t)} dt$，由式(3.4.34)及式(3.4.12)的第一式得

$$dx = \omega_1 e_1 = x_t dt = \sqrt{g(x_t, x_t)} dt \, e_1,$$

从而得

$$\omega_1 = \sqrt{g(x_t, x_t)} dt = ds, \omega_2 = \omega_3 = 0. \tag{3.4.36}$$

又由式(3.4.35)及式(3.4.12)的第二式得

$$de_1 = \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3 = e_{1s} ds = \sqrt{g(e_{1s}, e_{1s})} ds \, e_2,$$

所以

$$\omega_{12} = \sqrt{g(e_{1s}, e_{1s})} ds \triangleq k ds, \omega_{13} = 0. \tag{3.4.37}$$

其中 $k = \sqrt{g(e_{1s}, e_{1s})}$ 叫 M^1 的曲率.

由式(3.4.35)得

$$de_2 = -\frac{1}{2} g(e_{1s}, e_{1s})^{-\frac{3}{2}} \cdot 2g(e_{1ss}, e_{1s}) ds \, e_{1s} + g(e_{1s}, e_{1s})^{-\frac{1}{2}} e_{1ss} ds$$

$$= -\frac{g(e_{1ss}, e_{1s})}{g(e_{1s}, e_{1s})} e_2 + \frac{ds}{\sqrt{g(e_{1s}, e_{1s})}} e_{1ss}.$$

而 $\bar{g}(e_2, e_3) = 0$,由上式得

$$\omega_{23} = \bar{g}(de_2, e_3) = \frac{\bar{g}(e_{1ss}, e_3) ds}{\sqrt{g(e_{1s}, e_{1s})}} \triangleq \tau ds, \tag{3.4.38}$$

其中 $\tau = \dfrac{\bar{g}(e_{1ss}, e_3)}{\sqrt{g(e_{1s}, e_{1s})}}$ 叫 M^1 的挠率.

我们计算曲率 $k = \sqrt{g(e_{1s}, e_{1s})}$ 用一般参数 t 表示的公式,因为 $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{g(x_t, x_t)}}$ 并且 $e_1 = g(x_t, x_t)^{-\frac{1}{2}} x_t$,所以

$$e_{1s} = e_{1t}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g(x_t, x_t)}}\left[-\frac{1}{2}\frac{2g(x_{tt}, x_t)}{g(x_t, x_t)^{3/2}} x_t + \frac{1}{\sqrt{g(x_t, x_t)}} x_{tt}\right]$$

$$= -\frac{g(x_{tt}, x_t)}{g(x_t, x_t)^2} x_t + \frac{1}{g(x_t, x_t)} x_{tt}.$$

故

$$g(e_{1s}, e_{1s}) = \frac{g(x_{tt}, x_t)^2}{g(x_t, x_t)^3} - \frac{2g(x_{tt}, x_t)^2}{g(x_t, x_t)^3} + \frac{g(x_{tt}, x_{tt})}{g(x_t, x_t)^2}$$

$$= \frac{g(x_{tt}, x_{tt}) g(x_t, x_t) - g(x_t, x_{tt})^2}{g(x_t, x_t)^3} = \frac{(x_t \times x_{tt})^2}{g(x_t, x_t)^3}.$$

所以曲线 M^1 的曲率为

$$k = \frac{|x_t \times x_{tt}|}{g(x_t, x_t)^{3/2}} = \frac{|x_t \times x_{tt}|}{|x_t|^3}, \tag{3.4.39}$$

同理可得 M^1 的挠率

$$\tau = \frac{\bar{g}(e_{1ss}, e_3)}{\sqrt{g(e_{1s}, e_{1s})}} = \frac{(x_t, x_{tt}, x_{ttt})}{(x_t \times x_{tt})^2}. \tag{3.4.40}$$

而曲线 M^1 的运动方程是

$$\begin{cases} de_1 = \omega_{12} e_2 = k ds\, e_2 \\ de_2 = -\omega_{12} e_1 + \omega_{23} e_3 = -k ds\, e_1 + \tau ds\, e_3 \\ de_3 = -\omega_{23} e_2 = -\tau ds\, e_2, \end{cases}$$

即

$$
\begin{cases}
\dfrac{de_1}{ds} = & ke_2 & \\
\dfrac{de_2}{ds} = -ke_1 & & +\tau e_3 \\
\dfrac{de_3}{ds} = & -\tau e_2 &
\end{cases}
\tag{3.4.41}
$$

式(3.4.41)正是曲线论中的 Frenet-Serret 公式.

注 向量场 e_i 的绝对微分 $De_i = \sum\limits_j \omega_{ij} \otimes e_j$ 与运动方程 $de_i = \sum\limits_j \omega_{ij} e_j$ 本质上是一样的,从而 Riemann 度量联络

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

等价于

$$D(g(X,Y)) = g(DX,Y) + g(X,DY) \tag{3.4.42}$$

3.5 各种子流形的概念与性质

设 $f: M^n \to N^{n+p}$ 是等距浸入,$(N^{n+p}, \bar{g})$ 是 $n+p$ 维 Riemann 流形,(M^n, g) 是 N^{n+p} 的子流形,$g = f^* \bar{g}$.

1. 全测地子流形

定义 3.5.1 如果 M^n 的第二基本形式

$h=0$,或 $h(X,Y)=0$,任 $X, Y \in C^\infty(M; T(M))$.

则称 f 在点 $x \in M^n$ 是全测地的,若 f 在 M^n 上每一点是全测地的,则称 f 是全测地浸入,此时,M^n 称为 N^{n+p} 的全测地子流形.

由定义 3.5.1 及式(3.1.31)以及 $h(X+Y, X+Y) = h(X,X) + 2h(X,Y) + h(Y,Y)$,我们得全测地子流形的几个充要条件如下.

定理 3.5.1 (M^n, g) 是 $(N^{n+p}, \bar{g})$ 的全测地子流形

$\Leftrightarrow$ $h \equiv 0$ 或 $h(X,Y) \equiv 0$, X, Y 任意, (3.5.1)

$\Leftrightarrow$ 局部 (V, x_i) 上,在标准正交基 $\{e_i\}$ 下,有

$$h_{ij}^{\alpha} \equiv 0, i,j = 1,\cdots,n; \alpha = n+1,\cdots,n+p, \tag{3.5.2}$$

$\Leftrightarrow$ 第二基本形式模长的平方 $\sigma \equiv 0$ (3.5.3)

$\Leftrightarrow$ $h(X,X)=0, X$ 任意 (3.5.4)

$\Leftrightarrow$ $\bar{\nabla}_X X = \nabla_X X + h(X,X) = \nabla_X X$ (3.5.5)

$\Leftrightarrow$ M^n 中的任何测地线必是 N^{n+p} 中的测地线 (3.5.6)

注 在式(3.5.5)中,取 $X = T_\sigma$ 便得式(3.5.6).

定理 3.5.2 子流形 M^n 的第二基本形式模长的平方

$$\sigma = \sum_{i,j} \bar{g}(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j)) = \sum_\alpha \sum_{i,j}(h_{ij}^\alpha)^2$$

与标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 的选取无关.

证明:设 $\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n$ 是 M^n 的另一组标准正交基, 并设 $\bar{e}_i = \sum_k a_{ik}e_k$,其中$(a_{ij})$ 是正交阵,即 $\sum_k a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$.

从而

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma} &= \sum_{i,j}\bar{g}(h(\bar{e}_i,\bar{e}_j),h(\bar{e}_i,\bar{e}_j)) \\
&= \sum_{i,j}\bar{g}\Big(h(\sum_k a_{ik}e_k,\sum_l a_{jl}e_l),h(\sum_s a_{is}e_s,\sum_t a_{jt}e_t)\Big) \\
&= \sum_{k,l,s,t}\sum_i a_{ik}a_{is}\sum_j a_{jl}a_{jt}\bar{g}(h(e_k,e_l),h(e_s,e_t)) \\
&= \sum_{k,l}\bar{g}(h(e_k,e_l),h(e_k,e_l)) = \sigma.
\end{aligned}$$

2. 极小子流形

记 $H_\alpha = (h_{ij}^\alpha), \mathrm{tr}H_\alpha = \sum_i h_{ii}^\alpha$,我们先给出子流形 M^n 的中曲率向量 $\overline{H}$ 和中曲率 H 的定义如下.

定义 3.5.2 (1)法向量

$$\begin{aligned}
\overline{H}(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\bar{\nabla}_{e_i}e_i)^\perp = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(e_i,e_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_\alpha(\sum_i h_{ii}^\alpha)e_\alpha = \frac{1}{n}\sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha)e_\alpha \quad (3.5.7)
\end{aligned}$$

称为子流形 M^n 在 x 点的平均(中)曲率向量,容易证明,$\overline{H}$ 与标准正交基的选取无关.

(2)中曲率向量 $\overline{H}$ 的长度

$$H(x)=[\overline{g}(\overline{H},\overline{H})]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n}\Big[\sum_{\alpha}\big(\sum_{i}h_{ii}^{\alpha}\big)^{2}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{n}\Big[\sum_{\alpha}(\mathrm{tr}H_{\alpha})^{2}\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.8}$$

称为子流形 M^n 上 x 点的平均(中)曲率.

(3)若 M^n 上每一点的中曲率都是零,即

$$H\equiv 0, \tag{3.5.9}$$

则称 M^n 是 N^{n+p} 的极小子流形.

注 $\overline{H}$ 是 M 上的法向量场,H 是 M 上的函数,由定义我们得

定理 3.5.3 (M^n,g) 是 $(N^{n+p},\overline{g})$ 的极小子流形

$\Leftrightarrow$ $\overline{H}\equiv 0$ (3.5.10)

$\Leftrightarrow$ 局部 V 上,在标准正交基 $\{e_i\}$ 下,有

$$\sum_{i}h_{ii}^{\alpha}=0,\ \alpha=n+1,\cdots,n+p \tag{3.5.11}$$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr}H_{\alpha}=0,\ \forall\,\alpha.$ (3.5.12)

注 $P=1$ 时,$\overline{H}=\frac{1}{n}\sum_{i}h(e_i,e_i)=\frac{1}{n}(\mathrm{tr}H_{n+1})e_{n+1}$,$H=\frac{1}{n}\sum_{i}h_{ii}^{n+1}=\frac{1}{n}\mathrm{tr}H_{n+1}$.并且 $\overline{H}=He_{n+1}$.

3. 具有平行中曲率向量的子流形

定义 3.5.3 设 M^n 是 N^{n+p} 的子流形,若 M^n 的中曲率向量 $\overline{H}$ 在法丛中(或关于 M^n 的法联络 $\nabla^{\perp}$)是平行的,即

$$\nabla^{\perp}\overline{H}=0 \text{ 或 } \nabla_X^{\perp}\overline{H}=0 \quad (\text{或 } D^{\perp}\overline{H}=0), \tag{3.5.13}$$

则称 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的子流形.

显然,极小子流形必是具有平行平均曲率向量的子流形.

定理 3.5.4 设 (M^n,g) 是 $(N^{n+p},\overline{g})$ 的子流形,则 M^n 是具有平行平均曲率向量的子流形:$D^{\perp}\overline{H}=0$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_k h^\alpha_{kki} = 0, \alpha = n+1, \cdots, n+p. \tag{3.5.14}$$

证明:因为 $n\overline{H} = \sum_\alpha (\sum_k h^\alpha_{kk}) e_\alpha$,所以

$$\begin{aligned} nD^\perp \overline{H} &= \sum_\alpha \mathrm{d}(\sum_k h^\alpha_{kk}) e_\alpha + \sum_\alpha (\sum_k h^\alpha_{kk}) D^\perp e_\alpha \\ &= \sum_\alpha \mathrm{d}(\sum_k h^\alpha_{kk}) e_\alpha + \sum_\alpha \sum_k h^\alpha_{kk} \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} e_\beta \\ &= \sum_\alpha \left[\mathrm{d}(\sum_k h^\alpha_{kk}) + \sum_\beta \sum_k h^\beta_{kk} \omega_{\beta\alpha} \right] e_\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

又因为 h^α_{kk} 的一阶协变导数 h^α_{kki} 为

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} h^\alpha_{kki}\omega_i &= \sum_k \mathrm{d}h^\alpha_{kk} + \sum_{i,k} h^\alpha_{ik}\omega_{ik} + \sum_{i,k} h^\alpha_{ki}\omega_{ik} + \sum_{\beta,k} h^\beta_{kk}\omega_{\beta\alpha} \\ &= \mathrm{d}(\sum_k h^\alpha_{kk}) + \sum_\beta \sum_k h^\beta_{kk}\omega_{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{2}$$

由式(1)和式(2)得:$D^\perp \overline{H} = 0$ 等价于

$$\mathrm{d}(\sum_k h^\alpha_{kk}) + \sum_\beta \sum_k h^\beta_{kk}\omega_{\beta\alpha} = 0 \Leftrightarrow \sum_k h^\alpha_{kki} = 0, \forall \alpha.$$

注 若式(3.5.14)成立,则有

$$\sum_k h^\alpha_{kkij} = 0, \alpha = n+1, \cdots, n+p. \tag{3.5.15}$$

事实上:由式(3.5.14)及 h^α_{kk} 的二阶协变导数的定义得

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} h^\alpha_{kkij}\omega_j &= \mathrm{d}(\sum_k h^\alpha_{kki}) + \sum_{j,k} h^\alpha_{jki}\omega_{jk} + \sum_{j,k} h^\alpha_{kji}\omega_{jk} + \sum_{j,k} h^\alpha_{kkj}\omega_{ji} \\ &\quad + \sum_\beta \sum_k h^\beta_{kki}\omega_{\beta\alpha} = 0, \end{aligned}$$

故 $\sum_k h^\alpha_{kkij} = 0$.

推论 3.5.1 设(M^n, g)是$(N^{n+p}, \overline{g})$中具有平行中曲率向量的子流形,则中曲率 $H = c$ 是常数.

证法 1:设 e_{n+1}是单位中曲率向量,即

$$\overline{H} = H e_{n+p} \tag{1}$$

由式(1)和式(3.5.7)得

$$\sum_k h^{n+p}_{kk} = nH;\ \sum_k h^\alpha_{kk} = 0, \alpha \neq n+p. \tag{2}$$

对式(2)外微分并由式(3.5.14)得

$$n\mathrm{d}H = \sum_k \mathrm{d}h_{kk}^{n+p} = \sum_i \sum_k h_{kki}^{n+p}\omega_i - \sum_{i,k} h_{ik}^{n+p}\omega_{ik} - \sum_{i,k} h_{ki}^{n+p}\omega_{ik} - \sum_a \sum_k h_{kk}^{a}\omega_{an+p} = 0.$$

所以 $\mathrm{d}H = 0$,即 $\mathrm{d}H = \sum_i H_i\omega_i = 0$,得 $H_i = e_i(H) = 0$,故 $H = c$ 是常数,当 M^n 是连通的时,H 在 M^n 上是常数.

证法 2:对任 $X\in C^\infty(M;T(M))$,因为

$$\nabla_X^\perp \overline{H} = 0;\ \overline{\nabla}_X\overline{H} = \nabla_X\overline{H} + \nabla_X^\perp\overline{H} = \nabla_X\overline{H}.$$

我们得

$$XH^2 = X\overline{g}(\overline{H},\overline{H}) = \overline{\nabla}_X\overline{g}(\overline{H},\overline{H}) = 2\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{H},\overline{H})$$
$$= 2\overline{g}(\nabla_X^\perp\overline{H},\overline{H}) = 2\overline{g}(0,\overline{H}) = 0.$$

特别 $X = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$,有 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}H^2 = 0$,所以 H^2 是常数.

4. 全脐子流形

定义 3.5.4 设 ξ 是 M^n 上的法向量场,若切映射 A_ξ 与恒等映射 I 成比例,即

$$A_\xi = \lambda I \text{ 或 } A_\xi(X) = \lambda(x)X,\ \forall X\in C^\infty(M;T(M))$$

则称子流形 M^n 在点 x 处关于法方向 ξ 是脐点的. 若在 M^n 上每一点关于任意法方向 ξ 是脐点的,则称 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形,此时 $\lambda = \overline{g}(\overline{H},\xi)$ 是 M^n 上的函数.

下面我们给出全脐子流形的几个充要条件.

定理 3.5.5 (M^n,g) 是 $(N^{n+p},\overline{g})$ 的全脐子流形

$\Leftrightarrow$ 任意法向量场 ξ 及任意切向量场 X,有

$$A_\xi(X) = \overline{g}(\overline{H},\xi)X, \tag{3.5.16}$$

$\Leftrightarrow$ 任意法向量场 ξ 及任 $X, Y\in C^\infty(M;T(M))$,有

$$\overline{g}(h(X,Y),\xi) = \overline{g}(\overline{H},\xi)g(X,Y), \tag{3.5.17}$$

$\Leftrightarrow$ $h(X,Y) = g(X,Y)\overline{H}$ (3.5.18)

$\Leftrightarrow$ 局部 V 上,对于标准正交基$\{e_i\}$,有

$$h_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{n}(\sum_k h_{kk}^{\alpha})\delta_{ij} \triangleq H^{\alpha}\delta_{ij} \triangleq \lambda^{\alpha}\delta_{ij}, \qquad (3.5.19)$$

$\Leftrightarrow$ 任单位切向量场 e,有

$$h(e,e) = \overline{H}. \qquad (3.5.20)$$

证明:式(3.5.16)与式(3.5.17)等价:由于

$$\bar{g}(h(X,Y),\xi) = g(A_{\xi}(X),Y).$$

由定义 3.5.4 得, M^n 是全脐子流形: $A_{\xi}(X) = \lambda X$, 等价于 $\bar{g}(h(X,Y),\xi) = \lambda g(X,Y)$,从而 $\bar{g}(h(e_i,e_i),\xi) = \lambda g(e_i,e_i) = \lambda$, 所以

$$\begin{aligned}\bar{g}(\overline{H},\xi) &= \bar{g}\left(\frac{1}{n}\sum_i h(e_i,e_i),\xi\right) = \frac{1}{n}\sum_i \bar{g}(h(e_i,e_i),\xi)\\ &= \frac{1}{n}\sum_i \lambda g(e_i,e_i) = \lambda.\end{aligned}$$

式(3.5.17)$\Rightarrow$式(3.5.18):对任单位法向量场 e_{α},由式(3.5.17)得

$$\bar{g}(h(X,Y),e_{\alpha}) = \bar{g}(\overline{H},e_{\alpha})g(X,Y),$$

所以

$$\begin{aligned}h(X,Y) &= \sum_{\alpha}\bar{g}(h(X,Y),e_{\alpha})e_{\alpha} = \sum_{\alpha}\bar{g}(\overline{H},e_{\alpha})g(X,Y)e_{\alpha}\\ &= g(X,Y)\sum_{\alpha}\bar{g}(\overline{H},e_{\alpha})e_{\alpha} = g(X,Y)\overline{H}.\end{aligned}$$

式(3.5.17)$\Leftarrow$式(3.5.18):设 $h(X,Y) = g(X,Y)\overline{H}$,则对任法向量场 ξ,有

$$\begin{aligned}\bar{g}(h(X,Y),\xi) &= \bar{g}(g(X,Y)\overline{H},\xi)\\ &= \bar{g}(\overline{H},\xi)g(X,Y).\end{aligned}$$

式(3.5.18)$\Rightarrow$式(3.5.19):由式(3.1.29)及题设得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}h_{ij}^{\alpha}e_{\alpha} &= h(e_i,e_j) = g(e_i,e_j)\overline{H}\\ &= \delta_{ij}\overline{H} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha}(\sum_k h_{kk}^{\alpha})\delta_{ij}e_{\alpha}\end{aligned}$$

等价于 $h_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{n}(\sum_k h_{kk}^{\alpha})\delta_{ij} \triangleq H^{\alpha}\delta_{ij}$.

式(3.5.18)⇐ 式(3.5.19):因 $h_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{n}(\sum_k h_{kk}^{\alpha})\delta_{ij}$ 等价于 $h(e_i, e_j) = g(e_i, e_j)\overline{H}$,那么

$$\begin{aligned} h(X,Y) &= h(\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j) = \sum_{i,j} X^i Y^j h(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j g(e_i, e_j)\overline{H} = g(\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j)\overline{H} \\ &= g(X,Y)\overline{H}. \end{aligned}$$

式(3.5.18)⇒式(3.5.20):取 $X = Y = e$,因 $g(e,e) = 1$ 便可.

式(3.5.18)⇐式(3.5.20):任 $X, Y \in C^{\infty}(M; T(M))$,有

$$\begin{aligned} h(X,X) &= \begin{cases} 0 & X = 0 \\ h\left(\frac{X}{|X|}, \frac{X}{|X|}\right)|X|^2 & X \neq 0 \end{cases} \\ &= |X|^2 \overline{H}, \end{aligned}$$

又因为

$$h(X+Y, X+Y) = h(X,X) + 2h(X,Y) + h(Y,Y),$$

所以

$$\begin{aligned} h(X,Y) &= \frac{1}{2}[h(X+Y, X+Y) - h(X,X) - h(Y,Y)] \\ &= \frac{1}{2}[|X+Y|^2 - |X|^2 - |Y|^2]\overline{H} = g(X,Y)\overline{H}. \end{aligned}$$

5. 法丛平坦的子流形

由式(3.2.19),我们给出以下定义

定义 3.5.5 设 M^n 是 N^{n+p} 中的 Riemann 子流形,若对任 $\xi \in C^{\infty}(M; T^{\perp}(M))$,有

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla_X^{\perp} \nabla_Y^{\perp}\xi - \nabla_Y^{\perp} \nabla_X^{\perp}\xi - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}\xi = 0, \quad (3.5.21)$$

则称 M^n 的法丛是平坦的,上式可记作 $R^{\perp} = 0$.

现在设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 中的子流形,η 和 ξ 是 M^n 上的法向量场,X 和 Y 是 M^n 上的切向量场,由于

$$R^{\perp}(\eta, \xi, X, Y) = \overline{g}(\eta, R^{\perp}(X,Y)\xi), \quad (3.5.22)$$

又由式(3.2.23)知,$R^{\perp}_{\alpha\beta ij}$是矩阵$H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha$的第$i$行第$j$列上的元素,再由式(3.3.26)我们得:

定理 3.5.6 设M^n是$N^{n+p}(c)$中的 Riemann 子流形,则M^n的法丛平坦:$R^{\perp}=0$,

$$\Leftrightarrow \quad R^{\perp}(\eta,\xi,X,Y)=0, \tag{3.5.23}$$

$$\Leftrightarrow \quad R^{\perp}_{\alpha\beta ij}=0, \tag{3.5.24}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_\alpha H_\beta=H_\beta H_\alpha, \tag{3.5.25}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\alpha,\beta}\left[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2\right]=0, \tag{3.5.26}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Omega^{\perp}_{\alpha\beta}=0. \tag{3.5.27}$$

$$\Leftrightarrow \quad d\omega_{\alpha\beta}=\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}, \tag{3.5.28}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_{n+1},\cdots,H_{n+p}\text{ 可同时对角化}. \tag{3.5.29}$$

6. 伪脐子流形、入迷向子流形

定义 3.5.6 若M^n关于每一点的平均曲率向量$\overline{H}$是全脐的,即

$$\bar g(H(X,Y),\overline{H})=\bar g(\overline{H},\overline{H})g(X,Y)=H^2g(X,Y), \tag{3.5.30}$$

则称M^n是N^{n+p}的伪脐子流形.

定义 3.5.7 若对任单位切向量场e,有

$$|h(e,e)|=\lambda, \tag{3.5.31}$$

则称M^n是N^{n+p}的λ迷向子流形,$\lambda\in C^\infty(M;R)$.

定理 3.5.7 设(M^n,g)是$(N^{n+p},\bar g)$的全脐子流形,则

(1) (M^n,g)是$(N^{n+p},\bar g)$的伪脐子流形,

(2) (M^n,g)是$(N^{n+p},\bar g)$的$\lambda=H$迷向子流形.

证明:(1) 在式(3.5.17)中取$\xi=\overline{H}$便得式(3.5.30).

(2) 由式(3.5.20)得:

$$\lambda=|h(e,e)|=|\overline{H}|=H.$$

定理 3.5.8 (1)若M^n是极小子流形,则M^n是伪脐子流形.

(2) M^n 是全测地子流形的充要条件是：M^n 是全脐子流形并且也是极小子流形.

证明：(1) 由于 $H=0$，由式(3.5.30)易见成立.

(2) “$\Rightarrow$”：由式(3.5.2)、式(3.5.11)及式(3.5.19)易见成立.

“$\Leftarrow$”：设 M^n 是全脐子流形，由式(3.5.19)知

$$h_{ii}^{\alpha}=\lambda^{\alpha},h_{ij}^{\alpha}=0(i\neq j),\forall\alpha \tag{1}$$

又 M^n 是极小子流形，由式(3.5.11)得

$$\sum_i h_{ii}^{\alpha} = 0, \tag{2}$$

由式(1)和式(2)得 $h_{ij}^{\alpha}=0,\quad i,j=1,\cdots,n;\alpha=n+1,\cdots,n+p$. 由式(3.5.2)知，$M^n$ 是全测地子流形.

7. 子流形的几个例子

例 1 设(M^1,g)是$(N^n,\bar{g})$的一维子流形，则 M^1 是极小子流形$\Leftrightarrow M^1$ 是全测地子流形(测地线).

证明：在 N^n 中取标准正交标架场 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，使得 e_1 是 M^1 的切向量场，设 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 是其对偶，那么在 M^1 上，

$$\omega_{\alpha}=0,\quad\alpha=2,\cdots,n, \tag{1.1}$$

外微分式(1.1)得

$$0=\mathrm{d}\omega_{\alpha}=\omega_{\alpha 1}\wedge\omega_1, \tag{1.2}$$

由 Cartan 引理及中曲率向量的定义得

$$\omega_{1\alpha} = h_{11}^{\alpha}\omega_1,\overline{H} = \sum_{\alpha=2}^{n}h_{11}^{\alpha}e_{\alpha}, \tag{1.3}$$

所以 M^1 是极小子流形：$\overline{H}\equiv 0$，

$$\Leftrightarrow\quad h_{11}^{\alpha}\equiv 0(\text{全测地})\quad\Leftrightarrow\quad\omega_{1\alpha}=0,\quad\alpha=2,\cdots,n, \tag{1.4}$$

另一方面，因 $\omega_{11}=0$，所以

$$D_{e_1}^{N}=\omega_{12}e_2+\cdots+\omega_{1n}e_n, \tag{1.5}$$

根据测地线的定义知，M^1 是 N^n 的测地线

$$\Leftrightarrow\quad D_{e_1}^{N}=0\quad\Leftrightarrow\quad\omega_{1\alpha}=0,\alpha=2,\cdots,n.$$

例 2 设 E^n 是 R^{n+p} 中的 n 维平面(仿射子空间),则 E^n 是 R^{n+p} 的全测地子流形.

证法 1:设 $e_1,\cdots,e_n,\cdots,e_{n+p}$ 是 R^{n+p} 的标准正交基,限制到 E^n 上,$e_1,\cdots,e_n$ 切于 E^n;$e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$ 法于 E^n,设 x_0 是 E^n 中的固定点,则 E^n 关于原点的位置向量是

$$x = x_0 + \sum_i \lambda_i e_i, \tag{2.1}$$

现设 $\lambda_i \neq 0, i=1,\cdots,n$,即

$$g(x-x_0,e_i)=\lambda_i\neq 0, \tag{2.2}$$

$$g(x-x_0,e_\alpha)=0,\ \forall\,\alpha. \tag{2.3}$$

E^n 的运动方程为

$$\mathrm{d}x = \sum_i \omega_i e_i, \tag{2.4}$$

$$\mathrm{d}e_A = \sum_B \omega_{AB} e_B. \tag{2.5}$$

由于在 E^n 上,$\omega_\alpha = 0$,从而得 $0 = \mathrm{d}\omega_\alpha = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i$,由 Cartan 引理 3.3.1 得:

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{2.6}$$

对式(2.3)外微分并由运动方程式(2.4)和式(2.5)得

$$\begin{aligned} 0 &= g(\mathrm{d}x,e_\alpha) + g(x-x_0,\mathrm{d}e_\alpha) \\ &= g(\sum_i \omega_i e_i, e_\alpha) + g(x-x_0, \sum_i \omega_{\alpha i} e_i + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} e_\beta) \\ &= -\sum_i \omega_{i\alpha} g(x-x_0,e_i). \end{aligned} \tag{2.7}$$

由式(2.2)和式(2.7)得 $\omega_{i\alpha}=0$,再由式(2.6)得

$$h_{ij}^\alpha = 0,\ \forall\, i,j,\alpha, \tag{2.8}$$

故 E^n 是 R^{n+p} 的全测地子流形.

证法 2:同上 E^n 关于原点的位置向量是

$$x = x_0 + \sum_i \lambda_i e_i, \tag{2.9}$$

设 E^n 中任两切向量场 X 和 Y 的表达式分别是

$$X = \sum_i X^i e_i, Y = \sum_j Y^j e_j. \tag{2.10}$$

则

$$\nabla_X Y + h(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X(\sum_j Y^j e_j) = \sum_j X(Y^j)e_j \tag{2.11}$$

是切向量场,所以

$$h(X,Y) \equiv 0, h \equiv 0 \tag{2.12}$$

故 E^n 是 R^{n+p} 的全测地子流形.

注 (1) 当 x_0 为原点时,E^n 是 R^{n+p} 中过原点的 n 维平面,它是全测地子流形.

(2) 特别 R^n 是 R^{n+p} 的全测地子流形.

例 3 设 $S^n(a)=\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in R^{n+1} | g(x,x)=a^2\}$ 是 R^{n+1} 中以原点为中心,以 a 为半径的 n 维球面,证明 $S^n(a)$ 是 R^{n+1} 的全脐超曲面,并求 $S^n(a)$ 的截面曲率,Ricci 曲率 R_{ii},数量曲率 r 及中曲率 H.

证法 1:设 x 是 $S^n(a)$ 的位置向量,在 R^{n+1} 中选取标准正交标架场 $e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}$,使

$$e_{n+1} = -\frac{1}{a}x, \tag{3.1}$$

于是 $S^n(a)$ 的运动方程(基本方程)是

$$\mathrm{d}x \doteq \sum_i \omega_i e_i, \tag{3.2}$$

$$\mathrm{d}e_A = \sum_B \omega_{AB} e_B, \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0. \tag{3.3}$$

由于在 $S^n(a)$ 上,$\omega_{n+1}=0$,得

$$0 = \mathrm{d}\omega_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1i} \wedge \omega_i, \tag{3.4}$$

由 Cartan 引理 3.3.1 得:

$$\omega_{n+1i} = -\sum_j h_{ij}^{n+1}\omega_j, h_{ij}^{n+1} = h_{ji}^{n+1}. \tag{3.5}$$

由式(3.3) 得 $\mathrm{d}e_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1i} e_i$,所以

$$\omega_{n+1i} = g(\mathrm{d}e_{n+1}, e_i) = g\left(-\frac{1}{a}\mathrm{d}x, e_i\right)$$

$$= -\frac{1}{a}g(\sum_j \omega_j e_j, e_i) = -\frac{1}{a}\omega_i, \tag{3.6}$$

由式(3.5)和式(3.6)得

$$h_{ij}^{n+1} = \frac{1}{a}\delta_{ij}, \tag{3.7}$$

由式(3.7)知,$S^n(a)$是 R^{n+1}的全脐超曲面,因 R^{n+1}是平坦流形,由 Gauss 方程得 $S^n(a)$的截面曲率 R_{ijij}为

$$R_{ijij} = h_{ii}^{n+1}h_{jj}^{n+1} - (h_{ij}^{n+1})^2 = \frac{1}{a^2}, \tag{3.8}$$

沿 e_i 方向,$S^n(a)$的 Ricci 曲率 R_{ii}为

$$R_{ii} = \sum_{j\neq i} R_{ijij} = \frac{1}{a^2}(n-1), \tag{3.9}$$

$S^n(a)$的数量曲率 γ 为

$$\gamma = \sum_i R_{ii} = \frac{1}{a^2}n(n-1), \tag{3.10}$$

$S^n(a)$的中曲率向量 $\overline{H}$ 和中曲率H 分别是

$$\overline{H} = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{n+1}e_{n+1} = \frac{1}{a}e_{n+1}, \tag{3.11}$$

$$H = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{n+1} = \frac{1}{a}. \tag{3.12}$$

由上知,$S^n(a)$的截面曲率、Ricci 曲率、数量曲率及中曲率都是常数.

证法 2:因 $e_{n+1} = -\frac{1}{a}x$,设 $g = I^*\bar{g}$ 和 $\bar{g}$ 分别是 $S^n(a)$和 R^{n+1}中的 Riemann 度量,则

$$\bar{g}(h(X,Y), e_{n+1}) = \bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, e_{n+1}) = -g(Y, \overline{\nabla}_X e_{n+1})$$

$$= -g(Y, -\frac{1}{a}X) = \frac{1}{a}g(X,Y), \tag{3.13}$$

所以

$$h(X,Y) = \frac{1}{a}g(X,Y)e_{n+1}, \overline{H} = \frac{1}{a}e_{n+1}. \tag{3.14}$$

由式(3.5.18)知，$S^n(a)$是 R^{n+1}的全脐超曲面，并且 $H=\frac{1}{a}$，由式(3.14)得

$$h_{ij}^{n+1}=\frac{1}{a}\delta_{ij}, \tag{3.15}$$

由此可得 $R_{ijij}=\frac{1}{a^2}, R_{ii}=\frac{n-1}{a^2}, \gamma=\frac{n(n-1)}{a^2}$.

注 若选取 $e_{n+1}=\frac{1}{a}x$，可得 $h_{ij}^{n+1}=-\frac{1}{a}\delta_{ij}, H=-\frac{1}{a}$，其他量不变.

例 4 设 $x:M^n\to R^{n+1}$是平坦欧氏空间 R^{n+1}中的一个浸入的全脐超曲面($n\geqslant 2$)，则 M^n 被含在一个超平面内或者被含在一个标准的球面 $S^n\left(\frac{1}{|c|}\right)$内.

证明:设 $e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}$是 R^{n+1}的标准正交基，$\omega_1,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1}$是其对偶，$\omega_{AB}$是$R^{n+1}$的联络形式，因为 M^n 全脐，所以

$$h_{ij}^{n+1}=\lambda\delta_{ij}, \tag{4.1}$$

从而

$$\omega_{in+1}=\sum_j h_{ij}^{n+1}\omega_j=\lambda\omega_i. \tag{4.2}$$

对式(4.2)外微分并由第一和第二结构方程及式(4.2)得：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_{in+1}&=\mathrm{d}\lambda\wedge\omega_i+\lambda\mathrm{d}\omega_i=\sum_j\lambda_j\omega_j\wedge\omega_i+\lambda\sum_j\omega_{ij}\wedge\omega_j\\&=\sum_j\omega_{ij}\wedge\omega_{jn+1}=\lambda\sum_j\omega_{ij}\wedge\omega_j,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_j\lambda_j\omega_j\wedge\omega_i=0. \tag{4.3}$$

因为 $n\geqslant 2$，所以 $\lambda_j=0$，即 $e_j(\lambda)=0$，得 $\lambda=c$ 是常数.

(1) 当 $c=0$ 时，$\omega_{in+1}=0$，由运动方程得

$$\mathrm{d}e_{n+1}=\sum_i\omega_{n+1i}e_i=0, \tag{4.4}$$

故 $e_{n+1}=v_0$ 是固定的法向量，由于

$$\mathrm{d}[g(x,v_0)]=g(\mathrm{d}x,v_0)=\sum_i g(e_i,v_0)\omega_i=0, \tag{4.5}$$

得

$$g(x, v_0) = p \tag{4.6}$$

是超平面的方程. 故 $x(M^n)$被含在一个超平面内.

(2) 当 $c \neq 0$ 时, $\omega_{in+1} = c\omega_i$, 从而

$$d\left(x + \frac{1}{c}e_{n+1}\right) = dx + \frac{1}{c}de_{n+1} = \sum_i \omega_i e_i + \frac{1}{c}\sum_i \omega_{n+1i} e_i = 0, \tag{4.7}$$

由式(4.7)得

$$x + \frac{1}{c}e_{n+1} = x_0, \tag{4.8}$$

即$(x - x_0)^2 = \frac{1}{c^2}$,所以 M^n 被含在以 x_0 为中心,以$\frac{1}{|c|}$为半径的球面内.

注 若设 $V_0 = (a_1, \cdots, a_n)$. $x = (x_1, \cdots, x_n)$,则式(4.6)即为 $a_1 x + \cdots + a_n x_n = p$. 再设 $x_0 = (x_{10}, \cdots, x_{n0})$,那么方程$(x - x_0)^2 = \frac{1}{c^2}$就是$(x_1 - x_{10})^2 + \cdots + (x_n - x_{n0})^2 = \frac{1}{c^2}$.

例 5 设 $R^{n,1}$表示 Lorentz 空间(R^{n+1}, g),其中 $R^{n,1}$的伪黎曼度量 g 为

$$g = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2 \tag{5.1}$$

设 $R^n(-1) = \{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid g(x, x) = -1\}$,

证明: $R^n(-1)$是 $R^{n,1}$的全脐超曲面, $R^n(-1)$的截面曲率 $K(e_i, e_j) = -1$.

证明: 由式(5.1)知, $R^n(-1)$为

$R^n(-1) = \{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1\}$, x 是 $R^n(-1)$的位置向量,它可以看成是从 $R^n(-1)$到 R^{n+1}的包含映射,在 R^{n+1}上选取切向量场 $e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}$,对偶为 $\omega_1, \cdots, \omega_n, \omega_{n+1}$,因 $g(x, x) = -1$,外微分得

$$g(dx, x) = 0. \tag{5.2}$$

所以 x 是$R^n(-1)$的一个法向量场,不妨取 $x = e_{n+1}$,在标准正交

基$\{e_A\}$下，度量形式(5.1)为

$$g = \omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2 - \omega_{n+1}^2. \tag{5.3}$$

式(5.3)的分量是

$$g_{AB} = g(e_A, e_B) = \varepsilon_A \delta_{AB}, \tag{5.4}$$

其中 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = -\varepsilon_{n+1} = 1$，对式(5.4)外微分并由式(2.2.4)得

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d}g_{AB} &= \sum_C (\omega_{AC} g_{CB} + \omega_{BC} g_{CA}) \\ &= \sum_C (\omega_{AC} \varepsilon_C \delta_{CB} + \omega_{BC} \varepsilon_C \delta_{CA}) \\ &= \varepsilon_B \omega_{AB} + \varepsilon_A \omega_{BA}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

即

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \omega_{in+1} = \omega_{n+1i}. \tag{5.6}$$

运动方程为 $\mathrm{d}e_A = \sum_B \omega_{AB} e_B$，又 $x = e_{n+1}$，所以

$$\mathrm{d}e_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1i} e_i = \mathrm{d}x = \sum_i \omega_i e_i, \tag{5.7}$$

由式(5.7)得

$$\omega_{n+1i} = \omega_i, \tag{5.8}$$

由式(5.8)和式(5.6)及 $\omega_{in+1} = \sum_j h_{ij}^{n+1} \omega_j$ 得

$$h_{ij}^{n+1} = \delta_{ij}, H = 1. \tag{5.9}$$

由式(5.9)知，$R^n(-1)$是 $R^{n,1}$ 的全脐超曲面. 由式(5.6)、式(5.8)及 Gauss 方程式(3.4.15)得

$$\Omega_{ij}^M = \omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j} = \omega_i \wedge \omega_j = -(-\omega_i \wedge \omega_j) \tag{5.10}$$

由定理 2.6.5 得，$R^n(-1)$是常曲率为 -1 的流形.

3.6 黎曼流形 N^{n+1}中的超曲面 M^n

设(M^n, g)是$(N^{n+1}, \bar{g})$的超曲面，$e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}$是 N^{n+1}的标准正交切标架场，使 $e_1, \cdots, e_n$ 切于 M^n，e_{n+1}是 M^n 的法向量

场；$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$是$M^n$的局部坐标标架场

对M^n上的任意切向量场X，因$\bar{g}(e_{n+1},e_{n+1})=1$，所以

$$0=X\bar{g}(e_{n+1},e_{n+1})=2\bar{g}(\bar{\nabla}_X e_{n+1},e_{n+1}), \qquad (3.6.1)$$

其中$\bar{\nabla}$是N^{n+1}上的联络，由式(3.6.1)知，$\bar{\nabla}_X e_{n+1}$是M^n上的切向量场，又因为

$$\bar{\nabla}_X e_{n+1}=-A_{e_{n+1}}(X)+\nabla_X^{\perp}e_{n+1}.$$

得$\nabla_X^{\perp}e_{n+1}=0$，记线性映射$A_{e_{n+1}}=L$，从而

$$LX=A_{e_{n+1}}(X)=-\bar{\nabla}_X e_{n+1}, \qquad (3.6.2)$$

设Y也是M^n上的光滑切向量场，由于

$$\bar{g}(h(X,Y),e_{n+1})=g\left(A_{e_{n+1}}(X),Y\right)=g(LX,Y), \qquad (3.6.3)$$

所以

$$h(X,Y)=g(LX,Y)e_{n+1}, \qquad (3.6.4)$$

从而Gauss公式$\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h(X,Y)$为

$$\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+g(LX,Y)e_{n+1}. \qquad (3.6.5)$$

Gauss方程为

$$R(X,Y,Z,W)=K(X,Y,Z,W)+g(LX,Z)g(LY,W)-g(LX,W)g(LY,Z) \qquad (3.6.6)$$

局部(V,x_i)上，由于$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$，$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k}$，

由式(3.6.2)，记

$$L\frac{\partial}{\partial x_i}=-\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}e_{n+1}\triangleq\sum_k L_i^k\frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (3.6.7)$$

$$L_{ij}\triangleq g\left(L\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \qquad (3.6.8)$$

则

$$L_{ij}=g\left(L\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\bar{g}\left(-\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}e_{n+1},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{g}\left(e_{n+1},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\bar{g}\left(e_{n+1},\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

$$=\bar{g}\left(e_{n+1},\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\bar{g}\left(e_{n+1},h\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right),\tag{3.6.9}$$

得

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=L_{ij}e_{n+1}.\tag{3.6.10}$$

所以 L_{ij} 是坐标基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ 下的第二基本量，于是

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}+h\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$=\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k}+L_{ij}e_{n+1}\tag{3.6.11}$$

L_{ij} 与 L_i^j 的关系是

$$L_{ij}=g\left(L\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=g\left(\sum_k L_i^k\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$=\sum_k L_i^k g_{kj},\tag{3.6.12}$$

$$L_i^j=\sum_k L_i^k\delta_k^j=\sum_k L_i^k\left(\sum_m g_{km}g^{mj}\right)=\sum_m\left(\sum_k L_i^k g_{km}\right)g^{mj}$$

$$=\sum_m L_{im}g^{mj}=\sum_k L_{ik}g^{kj}.\tag{3.6.13}$$

由式(3.6.10)及 $h\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=h\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$，得

$$L_{ij}=L_{ji}，\text{即}\ g\left(L\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},L\frac{\partial}{\partial x_j}\right),\tag{3.6.14}$$

在标准正交基 $\{e_i\}$ 下，由式(3.6.14)得

$$L_i^j=g\left(\sum_k L_i^k e_k,e_j\right)=g(Le_i,e_j)=g(e_i,Le_j)$$

$$=g\left(e_i,\sum_k L_j^k e_k\right)=L_j^i.\tag{3.6.15}$$

得矩阵 (L_{ij}) 及 (L_i^j) 都是 M^n 上的实对称矩阵，还由于

$$A_{e_{n+1}}(e_i) = \sum_j h_{ij}^{n+1} e_j, \tag{3.6.16}$$

得

$$h_{ij}^{n+1} = g(A_{e_{n+1}}(e_i), e_j) = \bar{g}(h(e_i, e_j), e_{n+1})$$

$$= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_{n+1}) \tag{3.6.17}$$

及

$$h(e_i, e_j) = h_{ij}^{n+1} e_{n+1}. \tag{3.6.18}$$

式(3.6.18)与式(3.6.10)比较可知，h_{ij}^{n+1}是在标准正交基$\{e_i\}$下的第二基本量，并且平均曲率 H 为

$$H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}^{n+1}. \tag{3.6.19}$$

由于线性变换 $L = A_{e_{n+1}}$ 在基$\{e_i\}$下的矩阵为(L_i^j)，即 $Le_i = \sum_j L_i^j e_j, i = 1, \cdots, n$，并且$(L_i^j)$是 n 阶实对称矩阵，所以其特征值 $k_1, \cdots, k_n$ 都是实数，从而我们可作如下定义：

定义 3.6.1 (1) 超曲面 M^n 的 Gauss 曲率 K_G 为

$$K_G = k_1 k_2 \cdots k_n. \tag{3.6.20}$$

(2) M^n 的平均曲率 H 为

$$H = \frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \cdots + k_n), \tag{3.6.21}$$

其中 K_G 和 H 都是 M^n 上的函数.

由线性代数关于特征值的积与和分别是该矩阵的行列式与迹以及行列式的性质和式(3.6.13)，我们得 Gauss 曲率 K_G 和平均曲率 H 的计算公式如下：

$$K_G = k_1 k_2 \cdots k_n = \det(L_i^j) = \det(\sum_k L_{ik} g^{kj})$$

$$= \det(L_{ij}) \det(g^{ij}) = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}, \tag{3.6.22}$$

$$H = \frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(L_i^j)$$

$$= \frac{1}{n}\operatorname{tr}(\sum_k L_{ik} g^{kj}) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} L_{ij} g^{ji}. \tag{3.6.23}$$

其中 $\mathrm{tr}(L_i^j)$表示矩阵(L_i^j)的迹.

定理 3.6.1 设 M^2 是 R^3 中可定向的二维子流形(曲面),则 M^2 的 Gauss 曲率 K_G 与 M^2 的截面曲率 R_{1212}相等.

证明:设 e_1 和 e_2 是 M^2 的局部标准正交标架场,则

$$\begin{bmatrix} Le_1 \\ Le_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

M^2 的截面曲率

$$\begin{aligned} R_{1212} &= K_{1212} + g(Le_1, e_1)g(Le_2, e_2) - g(Le_1, e_2)g(Le_2, e_1) \\ &= 0 + g(L_1^1 e_1 + L_1^2 e_2, e_1)g(L_2^1 e_1 + L_2^2 e_2, e_2) \\ &\quad - g(L_1^1 e_1 + L_1^2 e_2, e_2)g(L_2^1 e_1 + L_2^2 e_2, e_1) \\ &= L_1^1 L_2^2 - L_1^2 L_2^1 = \det(L_i^j) = K_G. \end{aligned}$$

注 超曲面 M^n 在坐标基$\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$下的平均曲率式(3.6.23)与在标准正交基$\{e_i\}$下的平均曲率式(3.6.19)相同:

事实上:设 $e_i = \sum_k a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}$,由引理2.7.1得$\sum_i a_{ij} a_{ik} = g^{jk}$,所以由式(3.6.19) 及式(3.6.10) 得:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}^{n+1} = \frac{1}{n} \sum_i \bar{g}(h(e_i, e_i), e_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \bar{g}\left(h(\sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_k a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}), e_{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j,k} (\sum_i a_{ij} a_{ik}) \bar{g}\left(h(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}), e_{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j,k} g^{jk} \bar{g}(L_{jk} e_{n+1}, e_{n+1}) = \frac{1}{n} \sum_{i,k} L_{ik} g^{ki}, \end{aligned}$$

这就是式(3.6.23),所以平均曲率相同.

例 1 设 $S^n(a) = \{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = a^2\}$

是 R^{n+1}中以原点为中心,以 a 为半径的 n 维球面(超曲面).

求 $S^n(a)$的截面曲率、Gauss 曲率 K_G 和平均曲率H.

解 在2.6的例2中和3.5的例3中我们已求过 $S^n(a)$的截面曲率.

设 $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_{n+1}(t))$是球面 $S^n(a)$ 上的曲线,即 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2(t)=a^2$,两边求导得

$$\sum_i x_i(t)\cdot x'_i(t)=0. \tag{1.1}$$

由(1.1)和 $x=(x_1,\cdots,x_{n+1})$是 $S^n(a)$的法向量. 设$(V,\varphi,x_1,\cdots,x_n)$为$S^n(a)$的局部坐标系,使

$$\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_n)=\left(x_1,\cdots,x_n,\sqrt{a^2-\sum_{i=1}^n x_i^2}\right),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}x_{n+1}=-\frac{x_i}{x_{n+1}},i=1,\cdots,n, \tag{1.2}$$

并且

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\left(0,\cdots,0,\underset{(i)}{1},0,\cdots,\underset{(n)}{0},-\frac{x_i}{x_{n+1}}\right), \tag{1.3}$$

$i=1,\cdots,n$ 是$S^n(a)$上的切向量场,又

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\delta_{ij}+\frac{x_ix_j}{x_{n+1}^2}, \tag{1.4}$$

而

$$\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}=\left(0,\cdots,0,\frac{a^2}{x_{n+1}^2}\right),$$

是 R^{n+1}的切向量场,还由于

$$e_{n+1}=\left(\frac{x_1}{a},\cdots,\frac{x_n}{a},\frac{x_{n+1}}{a}\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{a}\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.5}$$

满足

$$\bar{g}(e_{n+1},e_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{x_i}{a}\right)^2=1,$$

$$\bar{g}\left(e_{n+1},\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{x_i}{a}+\frac{x_{n+1}}{a}\left(-\frac{x_i}{x_{n+1}}\right)=0.$$

所以 e_{n+1}是 $S^n(a)$上的单位法向量场，对任意切向量场 X，因 $\bar{\nabla}$ 是 R^{n+1}上的 Riemann 联络，所以

$$LX=-\bar{\nabla}_X e_{n+1}=-\bar{\nabla}_X\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{a}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$=-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n+1}X(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}=-\frac{1}{a}X$$

特别对于 $X=\frac{\partial}{\partial x_i}$和 $X=e_i$，有

$$L\frac{\partial}{\partial x_j}=-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x_j},Le_j=-\frac{1}{a}e_j \tag{1.6}$$

$j=1,\cdots,n$. 在坐标基$\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}$下，截面曲率

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}-g_{ij}^2}$$

$$=\frac{g\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_i}\right)g\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-g\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2}{g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_i}\right)g\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}.$$

在标准正交基$\{e_i\}$下，截面曲率

$$K(e_i,e_j)=R_{ijij}=K_{ijij}+g(Le_i,e_i)g(Le_j,e_j)-g(Le_i,e_j)^2$$

$$=0+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}.$$

由于

$$\begin{bmatrix}Le_1\\ \vdots\\ Le_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{a} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{bmatrix}$$

所以 M^n 的 Gauss 曲率 K_G 和中曲率 H 为

$$K_G=\det(L_i^j)=\left(-\frac{1}{a}\right)^n=\frac{(-1)^n}{a^2}, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{n}\operatorname{tr}(L_i^j)=\frac{1}{n}\left[\left(-\frac{1}{a}\right)+\left(-\frac{1}{a}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{a}\right)\right]\\&=-\frac{1}{a}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

由式(1.6)及 $L=A_{e_{n+1}}$得

$$Le_j = A_{e_{n+1}}(e_j) = \sum_k h_{jk}^{n+1}e_k = -\frac{1}{a}e_j,$$

所以

$$h_{ik}^{n+1}=-\frac{1}{a}\delta_{ik}. \tag{1.9}$$

由式(1.9)知,$S^n(a)$是 R^{n+1}的全脐超曲面.

中曲率的计算也可用公式(3.6.23)来算,为了方便,我们设 $n=2$,求 $S^2(a)$的中曲率 H. 由(1.4)得

$$g_{11}=1+\frac{x_1^2}{x_3^2},g_{12}=g_{21}=\frac{x_1x_2}{x_3},g_{22}=1+\frac{x_2^2}{x_3^2}. \tag{1.10}$$

易得

$$g^{11}=1-\frac{x_1^2}{a^2},g^{12}=g^{21}=-\frac{x_1x_2}{a^2},g^{22}=1-\frac{x_2^2}{a^2}. \tag{1.11}$$

因为 $x=(x_1,x_2,x_3),x_3=\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}$,所以 $S^2(a)$上的切向量为

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\left(1,0,-\frac{x_1}{x_3}\right),\frac{\partial}{\partial x_2}=(0,1,-\frac{x_2}{x_3}), \tag{1.12}$$

$S^2(a)$的法向量为

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\times\frac{\partial}{\partial x_2}=\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3},1\right)=\frac{1}{x_3}(x_1,x_2,x_3). \tag{1.13}$$

而

$$\frac{\partial}{\partial x_3}=\left(0,0,\frac{a^2}{x_3^2}\right). \tag{1.14}$$

是 R^3 的一个切向量，$S^2(a)$的单位法向量为

$$e_3 = \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \frac{x_3}{a}\right) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.15}$$

又因为

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_1} = \left(0, 0, -\frac{x_1^2 + x_3^2}{x_3^3}\right) \tag{1.16}$$

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_1} = \left(0, 0, -\frac{x_1 x_2}{x_3^3}\right) = \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{1.17}$$

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_2} = \left(0, 0, -\frac{x_2^2 + x_3^2}{x_3^3}\right) \tag{1.18}$$

所以在坐标基$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right\}$下，$S^2(a)$的第二基本量是

$$L_{11} = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_1}, e_3\right) = -\frac{x_1^2 + x_3^2}{a x_3^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_1}, e_3\right) = -\frac{x_1 x_2}{a x_3^2},$$

$$L_{22} = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_2}, e_3\right) = -\frac{x_2^2 + x_3^2}{a x_3^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}[g^{11}L_{11} + 2g^{12}L_{12} + g^{22}L_{22}] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)\left(-\frac{x_1^2 + x_3^2}{a x_3^2}\right) + 2\left(-\frac{x_1 x_2}{a^2}\right)\left(-\frac{x_1 x_2}{a x_3^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right)\left(-\frac{x_2^2 + x_3^2}{a x_3^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2a^3 x_3^2}[x_1^4 + x_2^4 - a^2(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) + (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 + 2x_1^2 x_2^2] \\
&= -\frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

注 1 由式(1.3)得 $S^n(a)$的标准正交基为

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x_i^2}{x_{n+1}^2}}}\left(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, -\frac{x_i}{x_{n+1}}\right)$$

$i=1,2,\cdots,n$.

注 2 选取 $e_{n+1}=\frac{1}{a}x$,得 $H=-\frac{1}{a}$;若选取 $e_{n+1}=-\frac{1}{a}x$,得 $H=\frac{1}{a}$.

例 2 设 $M^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\mid x_1^2+\cdots+x_n^2=a^2\}$,它是 R^{n+1}中的 n 维圆柱面(超曲面),求 M^n 的 Gauss 曲率 K_G 及平均曲率H.

解 局部上,设 $x_n>0$,那么 $x_n=\sqrt{a^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}$,$M^n$ 上的n 个切向量场为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_i}=\left(0,\cdots,0,\underset{(i)}{1},0,\cdots,0,-\dfrac{x_i}{x_n},0\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}}=(0,\cdots,0,1),\end{cases} \tag{2.1}$$

$i=1,\cdots,n-1$.设

$$\frac{\partial}{\partial x_n}=\left(0,\cdots,0,\frac{a^2}{x_n^2},0\right). \tag{2.2}$$

那么向量场

$$e_{n+1}=\left(\frac{x_1}{a},\cdots,\frac{x_n}{a},0\right)=\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{a}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.3}$$

满足

$$\text{(i)}\,\bar{g}(e_{n+1},e_{n+1})=\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i}{a}\right)^2=1,$$

$$\text{(ii)}\,\bar{g}\left(e_{n+1},\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{x_i}{a}+\frac{x_n}{a}\left(-\frac{x_i}{x_n}\right)=0,\ i=1,\cdots,n-1.$$

$$\bar{g}\left(e_{n+1},\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)=0,$$

所以 e_{n+1}是 M^n 上的单位法向量场,对 R^{n+1}上任一向量场X,有

$$X = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.4}$$

由于

$$LX = -\bar{\nabla}_X e_{n+1} = -\bar{\nabla}_X \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

取 $X = \frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, \cdots, n-1, n+1$,我们得

$$L \frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, \cdots, n-1; L \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} = 0, \tag{2.5}$$

特别对于 M^n 上的标准正交标架场 $\{e_1, \cdots, e_{n-1}, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\}$,有

$$Le_j = -\frac{1}{a} e_j, j = 1, \cdots, n-1; L \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} = 0. \tag{2.6}$$

即

$$\begin{bmatrix} Le_1 \\ \vdots \\ Le_{n-1} \\ L \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \end{bmatrix},$$

得 M^n 的 Gauss 曲率和平均曲率分别是

$$K_G = \det(L_i^j) = 0, \tag{2.7}$$

$$H = \frac{1}{n} \left[\left(-\frac{1}{a} \right) + \cdots + \left(-\frac{1}{a} \right) + 0 \right] = -\frac{n-1}{n} a. \tag{2.8}$$

注 1 在例 2 中,$n \geqslant 3$ 时,M^n 不是常 Riemann 曲率流形:例如:$R_{1212} = K_{1212} + \bar{g}(Le_1, e_1)\bar{g}(Le_2, e_2) - \bar{g}(Le_1, e_2)^2 = 0 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} > 0$,而

$$R_{1n1n} = K_{1n1n} + \bar{g}(Le_1, e_1)\bar{g}\left(L \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right) - \bar{g}\left(Le_1, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right)^2$$

$$=0+\bar{g}(-\frac{1}{a}e_1,e_1)\bar{g}\left(0,\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)-\bar{g}\left(-\frac{1}{a}e_1,\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)^2$$

$$=0\neq\frac{1}{a^2}.$$

注 2 在例2 中，$n=2$ 时，$M^2=\{x=(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2=a^2\}$ 是常曲率为 0 的 Riemann 流形.

3.7 常曲率黎曼流形中的全脐子流形

设 M^n 是常曲率空间 $N^{n+p}(c)$ 中的子流形，由 Gauss 方程得，M^n 的 Ricci 曲率张量场的分量为

$$R_{ik}=\sum_j R_{ijkj}=(n-1)c\delta_{ik}+\sum_\alpha\sum_j(h_{ik}^\alpha h_{jj}^\alpha-h_{ij}^\alpha h_{jk}^\alpha)\quad(3.7.1)$$

所以 M^n 的数量曲率为

$$r=\sum_i R_{ii}=n(n-1)c+\sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha)^2-\sum_\alpha\sum_{i,j}(h_{ij}^\alpha)^2$$

$$=n(n-1)c+n^2H^2-\sigma\quad(3.7.2)$$

1. $N^{n+p}(c)$ 中的全脐子流形 M^n

定理 3.7.1 设 (M^n,g) 是 $(N^{n+p}(c),\bar{g})$ 中的连通全脐子流形 $(n\geqslant2)$，则 M^n 是具有平行中曲率向量的子流形且法丛平坦，即

$$D^\perp\overline{H}=0,R_{\alpha\beta jk}^\perp=0\quad(3.7.3)$$

证明：在 $N^{n+p}(c)$ 中选取标准正交标架场 $e_1,\cdots,e_n,e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$，使 $e_{n+p}=\frac{1}{H}\overline{H}(H\neq0)$；$e_1,\cdots,e_n$ 切于 M^n，$e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$ 法于 M^n，由于

$$\overline{H}=He_{n+p},\quad(3.7.4)$$

由式(3.7.4)及式(3.5.7)得

$$\sum_k h_{kk}^{n+p}=nH;\sum_k h_{kk}^\alpha=0,\alpha\neq n+p,\quad(3.7.5)$$

由题设，M^n 是全脐子流形，所以

$$h_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{n}\Big(\sum_k h_{kk}^{\alpha}\Big)\delta_{ij} \triangleq \lambda^{\alpha}\delta_{ij}, \tag{3.7.6}$$

由式(3.7.5)和式(3.7.6)得

$$h_{ij}^{n+p} = H\delta_{ij}; h_{ij}^{\alpha} = 0, \alpha \neq n+p, \tag{3.7.7}$$

故

$$\omega_{in+p} = \sum_j h_{ij}^{n+p}\omega_j = H\omega_i; \omega_{i\alpha} = 0, \alpha \neq n+p, \tag{3.7.8}$$

其中 $i = 1, \cdots, n$,外微分前一式并由式(3.7.8)得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_{in+p} &= \mathrm{d}H \wedge \omega_i + H\mathrm{d}\omega_i = \sum_j H_j\omega_j \wedge \omega_i + H\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j \\ &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+p} + \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha n+p} + \Omega_{in+p}^N \\ &= H\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \end{aligned}$$

得

$$\sum_j H_j\omega_j \wedge \omega_i = 0, i = 1, \cdots, n. \tag{3.7.9}$$

因为 $n \geqslant 2$,所以 $H_j = e_j(H) = 0$,得 H 是局部常数,又 M^n 连通,所以 $N^{n+p}(c)$中的全脐子流形的中曲率为常数,即

$$H \equiv C(常数). \tag{3.7.10}$$

对式(3.7.8)的第二式外微分并由式(3.7.8)式得

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d}\omega_{i\alpha} &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{j\alpha} + \sum_\beta \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} + \Omega_{i\alpha}^N \\ &= \omega_{in+p} \wedge \omega_{n+p\alpha} = H\omega_i \wedge \omega_{n+p\alpha}, \end{aligned}$$

$i = 1, \cdots, n$,由此得:

$$\omega_{n+p\alpha} = 0, \forall \alpha \tag{3.7.11}$$

由式(3.7.4)、式(3.7.10)、式(3.7.11)及定义 1.7.1 得

$$\begin{aligned} D^{\perp}\overline{H} &= D^{\perp}(He_{n+p}) = \mathrm{d}H \otimes e_{n+p} + HD^{\perp}e_{n+p} \\ &= H\sum_\alpha \omega_{n+p\alpha} \otimes e_\alpha = 0, \end{aligned}$$

所以 M^n 是 $N^{n+p}(c)$中具有平行中曲率向量的子流形.

由式(3.7.6)及式(3.2.21)得

$$R^{\perp}_{\alpha\beta ij} = K_{\alpha\beta ij} + \sum_k (h^\alpha_{ik}h^\beta_{jk} - h^\alpha_{jk}h^\beta_{ik})$$

$$= 0 + \lambda^\alpha\lambda^\beta \sum_k (\delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{jk}\delta_{ik}) = 0.$$

故 M^n 的法丛平坦,即 $R^{\perp}=0$.

定理 3.7.2 设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 中的伪脐子流形.则 M^n 是全脐子流形的充要条件是

$$\sigma = nH^2 (\text{即 } \gamma = n(n-1)(c+H^2)). \tag{3.7.12}$$

证明:"⇒"设 $\overline{H} = He_{n+1}$,因 M^n 是全脐子流形,所以

$$h^{n+p}_{ij} = H\delta_{ij};\ h^\alpha_{ij} = 0, \alpha \neq n+p, \tag{1}$$

故

$\sigma = \sum_\alpha \mathrm{tr}H^2_\alpha = \mathrm{tr}H^2_{n+p} = nH^2$,由式(3.7.2)得 $\gamma = n(n-1)(c + H^2)$.

"⇐":设 $\overline{H} = He_{n+p}$,因 M^n 是伪脐子流形,所以

$$h^{n+p}_{ij} = H\delta_{ij}, \tag{2}$$

由式(2)得

$$\mathrm{tr}H^2_{n+p} = nH^2, \tag{3}$$

又 $\sigma = nH^2$,所以

$$\tau \triangleq \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}(h^\alpha_{ij})^2 = \sigma - \mathrm{tr}H^2_{n+p} = 0. \tag{4}$$

由式(2)和式(4)知,M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐子流形.

定理 3.7.3 常曲率空间 $N^{n+p}(c)$ 中的全脐子流形 M^n 一定是常曲率为 $K = c + H^2$ 的流形.

证明:因为 M^n 是全脐子流形,所以

$$h^\alpha_{ij} = \lambda^\alpha\delta_{ij},$$

由式(3.7.10)知,中曲率 H 是常数,所以 M^n 的曲率张量场在标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 下的分量

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} + \sum_\alpha (h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk})$$

$$= c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_\alpha (\lambda^\alpha)^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$= (c + H^2)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

其中用到了 $n^2H^2 = \sum_\alpha (\mathrm{tr}H_\alpha)^2 = \sum_\alpha \left(\sum_i h_{ii}^\alpha\right)^2 = \sum_\alpha \left(\sum_i \lambda^\alpha\right)^2 = n^2 \sum_\alpha (\lambda^\alpha)^2$，所以 M^n 的截面曲率 $K(e_i, e_j) = R_{ijij} = c + H^2$ 是常数.

例 1 设 E^{n+1} 是 R^{n+2} 的仿射超平面，v_0 是 E^{n+1} 的单位法向量，$\cos\theta$ 为原点到 E^{n+1} 的距离，令 $M^n = S^{n+1}(1) \cap E^{n+1}$，$x$ 是 M^n 的位置向量. 证明 M^n 是 $S^{n+1}(1)$ 的全脐子流形，并求 M^n 的截面曲率.

证明：依题有

$$g(x, x) = 1, g(x, v_0) = \cos\theta, \tag{1.1}$$

所以 x 是 M^n 和 $S^{n+1}(1)$ 的法向量，取 R^{n+2} 的标准正交基向量场 $e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}$；对偶为 $\omega_1, \cdots, \omega_{n+2}$. 因为 v_0, x, e_{n+1} 都是 M^n 的法向量场，所以可设

$$e_{n+1} = \alpha x + \beta v_0, \tag{1.2}$$

从而

$$0 = g(e_{n+1}, x) = g(\alpha x + \beta v_0, x) = \alpha + \beta\cos\theta, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} 1 &= g(e_{n+1}, e_{n+1}) = g(\alpha x + \beta v_0, \alpha x + \beta v_0) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta, \end{aligned} \tag{1.4}$$

由式(1.3)和式(1.4)解得

$$\alpha = \cot\theta, \beta = -\csc\theta. \tag{1.5}$$

所以式(1.2)为

$$e_{n+1} = (\cot\theta)x - (\csc\theta)v_0 \tag{1.6}$$

对式(1.6)外微分并由运动方程得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_{n+1} &= (\cot\theta)\mathrm{d}x = (\cot\theta)\sum_i \omega_i e_i \\ &= \sum_i \omega_{n+1i} e_i = -\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}\omega_j e_i \end{aligned}$$

比较得

$$h_{ij}^{n+1} = -\cot\theta \cdot \delta_{ij} \tag{1.7}$$

由式(1.7)知,M^n 是$S^{n+1}(1)$的全脐子流形,中曲率

$$H = -\cot\theta, \tag{1.8}$$

由定理3.7.3知,M^n 的截面曲率

$$K = 1 + H^2 = 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \tag{1.9}$$

如果 $\cot\theta = 0$,则由式(1.7)知,M^n 是S^{n+1}中的全测地子流形,此时 E^{n+1}为 R^{n+2}中过原点的 $n+1$ 维线性超平面.

注 R^{n+2}中的度量 $g = dx_1^2 + \cdots + dx_{n+2}^2$.

例2 设 v_0 是 Lorentz 空间 $R^{n+1,1} = R^{n+2}$中的非零向量,$R^{n+1,1}$中的伪黎曼度量为

$$\bar{g} = dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2 - dx_{n+2}^2, \tag{2.1}$$

由3.5节的例5知,$R^{n+1}(-1) = \{x = (x_1, \cdots, x_{n+2}) \in R^{n+1,1} \mid \bar{g}(x, x) = -1\}$是 $R^{n+1,1}$中常曲率为 -1 的全脐子流形,现设

$$M^n = \{x \in R^{n+1,1} \mid \bar{g}(x, x) = -1 \text{ 且 } \bar{g}(x, v_0) = a\}, \tag{2.2}$$

证明 M^n 是$R^{n+1}(-1)$的全脐子流形,并求 M^n 的截面曲率.

证明:由 $\bar{g}(x, x) = -1$ 得 $\bar{g}(dx, x) = 0$,所以 x 是 $R^{n+1}(-1)$及 M^n 的法向量场,再由 $\bar{g}(x, v_0) = a$ 得知,v_0 亦是 $R^{n+1}(-1)$和M^n 的法向量.

取 $R^{n+1,1}$的标准正交基向量场 $e_1, \cdots, e_{n+1}, e_{n+2} = x$,使$e_1, \cdots, e_n$ 切于M^n,e_{n+1}切于 $R^{n+1}(-1)$而法于 M^n,从而度量式(2.1)为

$$g_{AB} = \bar{g}(e_A, e_B) = \varepsilon_A \delta_{AB}, \tag{2.3}$$

其中 $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = -\varepsilon_{n+2} = 1$,因为 v_0, x, e_{n+1}都是 M^n 的法向量场,并且法空间为二维,所以有

$$e_{n+1} = \alpha x + \beta v_0. \tag{2.4}$$

外微分式(2.4)并由运动方程得

$$de_{n+1} = \alpha dx = \alpha \sum_i \omega_i e_i = \sum_i \omega_{n+1\,i} e_i = -\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1} \omega_j e_i,$$

比较两边得

$$h_{ij}^{n+1} = -\alpha\delta_{ij}; H = -\alpha. \tag{2.5}$$

由式(2.5)知,M^n 是 $R^{n+1}(-1)$ 的全脐子流形,由定理 3.7.3 知,M^n 的截面曲率为

$$K = -1 + H^2 = \alpha^2 - 1, \tag{2.6}$$

另外,由于 $x = e_{n+2}$,所以式(2.4)为

$$e_{n+1} = \alpha e_{n+2} + \beta v_0. \tag{2.7}$$

外微分式(2.7)并由运动方程得

$$\mathrm{d}e_{n+1} = \alpha \mathrm{d}e_{n+2} = \alpha \sum_i \omega_{n+2i} e_i = \sum_i \omega_{n+1i} e_i,$$

得 $\omega_{n+1i} = \alpha \omega_{n+2i}$,从而得

$$h_{ij}^{n+1} = \alpha h_{ij}^{n+2}, \tag{2.8}$$

由式(2.5)和式(2.8)得

$$h_{ij}^{n+2} = -\delta_{ij}. \tag{2.9}$$

所以 M^n 也是 $R^{n+1,1}$ 的全脐子流形,M^n 作为 $R^{n+1,1}$ 的子流形的中曲率为

$$H_1 = \frac{1}{n}\sqrt{\left(\sum_i h_{ii}^{n+1}\right)^2 + \left(\sum_i h_{ii}^{n+2}\right)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{(-n\alpha)^2 + (-n)^2}$$
$$= \sqrt{1+\alpha^2}. \tag{2.10}$$

下面我们讨论式(2.6)中截曲率 $K = \alpha^2 - 1$ 里的 α 与式(2.2)中的常数 a 的关系:由式(2.4)及 M^n 的定义得:

$$a = \bar{g}(x, v_0) = \bar{g}\left(x, \frac{1}{\beta}(e_{n+1} - \alpha x)\right)$$
$$= -\frac{\alpha}{\beta}\bar{g}(x, x) = \frac{\alpha}{\beta} \tag{2.11}$$

$$\bar{g}(v_0, v_0) = \bar{g}\left(\frac{1}{\beta}(e_{n+1} - \alpha x), \frac{1}{\beta}(e_{n+1} - \alpha x)\right)$$
$$= \frac{1}{\beta^2}(1 - \alpha^2) = \frac{1}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2} - a^2. \tag{2.12}$$

(ⅰ)如果 $0 = \bar{g}(v_0, v_0) = \frac{1}{\beta^2} - a^2$,则 $\beta^2 = \frac{1}{a^2}$,$\alpha^2 = a^2\beta^2 = 1$,所以

$$h_{ij}^{n+1} = \pm\delta_{ij}; H = \pm 1; \overline{H} = \pm e_{n+1}. \tag{2.13}$$

由定理 3.7.3 知，M^n 的截面曲率

$$K=-1+\alpha^2=-1+1=0. \tag{2.14}$$

(ⅱ) 如果 $1=\bar{g}(v_0,v_0)=\frac{1}{\beta^2}-a^2$，则 $\beta^2=\frac{1}{1+a^2}$，得 $\alpha^2=a^2\beta^2=\frac{a^2}{1+a^2}$，从而

$$h_{ij}^{n+1}=\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\delta_{ij};H=\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{2.15}$$

所以 M^n 的截面曲率是下面的负常数：

$$K=-1+\alpha^2=-\frac{1}{1+a^2}. \tag{2.16}$$

(ⅲ) 如果 $-1=\bar{g}(v_0,v_0)=\frac{1}{\beta^2}-a^2$，则 $\beta^2=\frac{1}{a^2-1}$，$\alpha^2=a^2\beta^2=\frac{a^2}{a^2-1}$，得

$$h_{ij}^{n+1}=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\delta_{ij};H=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2-1}}. \tag{2.17}$$

所以 M^n 的截面曲率是下面的正常数：

$$K=-1+\alpha^2=-1+\frac{a^2}{a^2-1}=\frac{1}{a^2-1}. \tag{2.18}$$

注 1 当 $n=1$ 时，M^1 是 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=-1$（双叶双曲面）与 $v_1x_1+v_2x-v_3x_3=a$（平面）的交线，$\bar{g}(v_0,v_0)=v_1^2+v_2^2-v_3^2$.

定理 3.7.4 常曲率流形 $N^{n+p}(c)$ 中的全脐子流形 M^n 或者是全测地的，或者被含在 $N^{n+p}(c)$ 中的一个 $n+1$ 维全测地子空间的一个超球面上.

证明留作练习.

2. $N^{n+1}(c)$ 中的全脐超曲面 M^n

经典微分几何中有如下两定理

定理 3.7.5 (H. Liebmann, 1906) 设 M^2 是 R^3 中的紧致曲面，若 M^2 的 Gauss 曲率 $K>0$（凸曲面）且中曲率 $H\equiv C$（常数），

则 $M^2 = S^2$ 是球面(全脐超曲面).

定理 3.7.6 设 M^2 是 R^3 中的紧致曲面,如果 M^n 的 Gauss 曲率 $K \equiv C$(常数),则 $M^2 = S^2$.

Nomizi and Smyth 证明了如下定理

定理 3.7.7 (1) 设 $M^2 \to R^{n+1}$ 紧致,若 $K_{ijij} \geqslant 0$ 且 $H = C$(常数),则 $M^n = S^n$ 是球面(全脐超曲面).

(2) 设 $M^n \to S^{n+1}(1)$ 紧致,若 $K_{ijij} \geqslant 0$ 且 $H = C$(常数),则 $M^n = S^{t_1} \times S^{t_2}, t_1 + t_2 = n$.

对于高维超曲面 M^n,设(h_{ij})的特征值为 λ_i,即 $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}, i = 1,2,\cdots,n$,令

$$S_k = \frac{1}{C_n^k} \sum \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}, \tag{3.7.13}$$

$$P_k = \frac{1}{C_n^k} \sum \frac{1}{\lambda_{i_1}} \frac{1}{\lambda_{i_2}} \cdots \frac{1}{\lambda_{i_k}}. \tag{3.7.14}$$

特别地:

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_i \lambda_i = H, S_n = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = K_G. \tag{3.7.15}$$

定理 3.7.8 设 $M^n \to R^{n+1}$是凸曲面,若对某个 k, $P_k =$ 常数,则$M^n = S^n$.

(定理 3.7.8 参见《*J. Math. and Math*》,1957 年)

1967 年,Hsing C. C 证明了

定理 3.7.9 设 $M^n \to R^{n+1}$是凸曲面,若 $S_k =$ 常数,则$M^n = S^n$. 现令

$$C_k = \mathrm{tr}((h_{ij})^k) = \sum_i \lambda_i^k, \tag{3.7.16}$$

$$T_k = \sum_i \frac{1}{\lambda_i^k}, \tag{3.7.17}$$

1984 年 Sun Ziqi 证明了如下定理

定理 3.7.10 设 $M^n \to = N^{n+1}(c)$是紧致凸曲面,

(1) 若 $C_k =$ 常数,则 $M^n = S^n$.

(2) 若 $T_k=$ 常数,则 $M^n=S^n$.

一般情形为

若 $C_1^\alpha C_k^\beta=$ 常数,$\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$,则 $M^n=S^n$.

若 $T_l^\alpha T_k^\beta=$ 常数,$\alpha+\beta>0$,则 $M^n=S^n$.

1986 年 Li An Min 在《Math. Z》中证明了

定理 3.7.11 设 $M^n\to N^{n+1}(c)$ 是紧致正曲率超曲面,

(1) 若 $S_k=$ 常数,$k=1,2,3,n$,则 $M^n=S^n$.

(2) 若 $P_k=$ 常数,$k=1,2,3,n$,则 $M^n=S^n$.

将余维数推广,S. T. Yau 证明了

定理 3.7.12 设 $M^n\to N^{n+p}(c)$ 是紧致于流形且具有平行中曲向量:$D^\perp\overline{H}=0$.

(1) 若 M^n 的截面曲率 $R_{ijij}>0$,则 M^n 是伪脐子流形.

(2) 若 $R_{ijij}\geqslant 0$,则 $M^n=S^{q_1}\times S^{q_2}\times\cdots\times S^{q_t}$. 其中 $q_1+\cdots+q_t=n$,S^{q_i}是全脐常曲率流形.

定理 3.7.13 设 M^n 是$N^{n+p}(c)$的子流形,若 $H\neq 0$ 且 $R_{ii}\geqslant(n-1)c$(或 $R_{ii}>(n-1)c$),则 M^n 关于中曲率的第二基本形式是半正定的(或正定的).

证明:设 $\overline{H}=He_{n+1}$,则 $\sum\limits_i h_{ii}^{n+p}=nH$, $\sum\limits_j h_{jj}^\alpha=0,\alpha\neq n+p$,令 $h_{ij}^{n+p}=\lambda_i\delta_{ij}$,由 Gauss 方程得

$$R_{ijij}=c+\sum_\alpha\left[h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha-(h_{ij}^\alpha)^2\right],$$

所以

$$\begin{aligned}R_{ii}=\sum_{j\neq i}R_{ijij}&=(n-1)c+h_{ii}^{n+p}\sum_{j\neq i}h_{jj}^{n+p}-\sum_{j\neq i}(h_{ij}^{n+p})^2\\&\quad+\sum_{\alpha\neq n+p}h_{ii}^\alpha\sum_{j\neq i}h_{jj}^\alpha-\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{j\neq i}(h_{ij}^\alpha)^2\\&=(n-1)c+\lambda_i(nH-\lambda_i)+\sum_{\alpha\neq n+p}\left[-(h_{ii}^\alpha)^2-\sum_{j\neq i}(h_{ij}^\alpha)^2\right].\end{aligned}$$

依题设得

$$R_{ii}-(n-1)c=nH\lambda_i-\lambda_i^2-\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_j(h_{ij}^\alpha)^2\geqslant 0. \tag{3.7.18}$$

由式(3.7.18)得

$$nH\lambda_i \geqslant \lambda_i^2 + \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_j (h_{ij}^\alpha)^2 \geqslant 0, \qquad (3.7.19)$$

因 $H \neq 0$,不妨设 $H>0$,(否则可改变 M^n 的定向便可). 由上式得 $\lambda_i \geqslant 0, i=1,\cdots,n$. 即 $h_{ii}^{n+p} \geqslant 0$,所以(h_{ij}^{n+p})是半正定的.

若 $R_{ii}-(n-1)c>0$,由式(3.7.18)得

$$nH\lambda_i>0, i=1,\cdots,n, \qquad (3.7.20)$$

又 $H>0$,所以 $\lambda_i>0, i=1,\cdots,n$. 故$(h_{ij}^{n+p})$是正定的矩阵.

推论 3.7.1 设 M^n 是$N^{n+1}(c)$的超曲面,若 $H \neq 0$ 且 $R_{ii} \geqslant (n-1)c$,那么 M^n 是凸曲面.

推论 3.7.2 设 M^n 是R^{n+1}的紧致超曲面,若 $H=$常数$R_{ii} \geqslant 0$,则 $M^n=S^n$(全脐超曲面).

证明:因 $c=0$,由推论 3.7.1 得 M^n 是凸曲面. 又 $H=$常数,由定理 3.7.7 得 $M^n=S^n$.

定理 3.7.14 设 M^n 是$N^{n+1}(c)$的紧致超曲面,M^n 的数量曲率$\gamma=$常数,

(1) 若 $c \geqslant 0$ 且 $R_{ii}>(n-1)c$,则 M^n 是全脐超曲面.

(2) 若 $c<0$ 且 $R_{ijij}>0$,则 M^n 是全脐超曲面.

证明:因为数量曲率为常数,所以平均数量曲率 $\gamma = \frac{1}{n(n-1)}\sum_i R_{ii}$ 也为常数. 令 $h_{ij}^{n+1}=\lambda_i\delta_{ij}$,则 $\sum_i \lambda_i = nH, R_{ijij} = c+\lambda_i\lambda_j$,

$$R_{ii} = (n-1)c + \lambda_i \sum_{j \neq i} \lambda_j = (n-1)c - \lambda_i^2 + nH\lambda_i \qquad (1.1)$$

所以

$$n(n-1)(\gamma-c) = -\sum_i \lambda_i^2 + n^2H^2. \qquad (1.2)$$

因 $n(n-1)(\gamma-c)=$常数,由上式得

$$\frac{1}{2}\Delta\Big(\sum_i \lambda_i^2\Big) = \frac{1}{2}n^2\Delta H^2 = n^2[\,|\mathrm{grad}H|^2 + H\Delta H\,], \qquad (1.3)$$

另一方面,由式(3.3.24)得

$$\frac{1}{2}\Delta\Big(\sum_i \lambda_i^2\Big) = \frac{1}{2}\Delta\Big(\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1})^2\Big) = \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1}$$

$$= \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}\sum_k h_{kkij}^{n+1} + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{n+1}(h_{km}^{n+1}R_{mijk} + h_{mi}^{n+1}R_{mkjk})$$

$$= \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2 + n\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}H_{ij} + \sum_{i,k}(\lambda_i\lambda_k R_{kiik} + \lambda_i\lambda_i R_{ikik})$$

$$= \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2 + n\sum_i \lambda_i H_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}. \tag{1.4}$$

由式(1.3)和式(1.4)得

$$n\sum_i \lambda_i \sum_j H_{jj} - n\sum_i \lambda_i H_{ii}$$

$$= \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2 - n^2|\mathrm{grad}H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.$$

上式的左面 $= n[(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(H_{11} + \cdots + H_{nn}) - \lambda_1 H_{11} - \cdots - \lambda_n H_{nn}] = n[(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n)H_{11} + \cdots + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1})H_{nn}] = n\sum_i\Big(\sum_{j\neq i}\lambda_j\Big)H_{ii}.$

即

$$n\sum_i\Big(\sum_{j\neq i}\lambda_j\Big)H_{ii} = \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2 - n^2|\mathrm{grad}H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij} \tag{1.5}$$

因为 M^n 紧致,所以存在 $x_0 \in M^n$,使 H 在 x_0 点取得极大值,从而

$$H_{ii} \leqslant 0, 在\ x_0\ 点 \tag{1.6}$$

$$|\mathrm{grad}H|^2 = \sum_i [e_i(H)]^2 = 0, 在\ x_0\ 点. \tag{1.7}$$

以下我们证明

$$H \neq 0, 任\ x \in M^n, \tag{1.8}$$

对于条件(1),若 $H=0$,由式(1.1)得 $-\lambda_i^2 = R_{ii} - (n-1)c \leqslant 0$,与 $R_{ii} > (n-1)c$ 矛盾.

对于条件(2),若 $H=0$,因 $R_{ijij}>0$,所以 $R_{ii} = \sum_{j\neq i} R_{ijij} > 0$,从而由式(1.1)得 $R_{ii} = (n-1)c - \lambda_i^2 > 0$,得 $\lambda_i^2 < (n-1)c < 0$ 与

$\lambda_i^2 \geqslant 0$ 矛盾.

由式(1.8),不妨设 $H>0$,下面我们先证明:

$$\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n, \tag{1.9}$$

对于条件(1),因 $R_{ii} > (n-1)c$,又 $H>0$,由定理 3.7.13 得 $\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$.

对于条件(2),因 $c<0, R_{ijij}>0$,即 $R_{ijij} = c + \lambda_i\lambda_j > 0$,得 $\lambda_i\lambda_j > -c > 0$,$\lambda_i$ 与 λ_j 符号相同,由于 $H>0$,所以 $\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$.

由式(1.6),式(1.7),式(1.9),式(1.5)为

$$\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij} = n\sum_i\Big(\sum_{j\neq i}\lambda_j\Big)H_{ii} \leqslant 0$$

在 x_0 点成立,所以在 x_0 点有以下两式成立:

$$\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2 = 0 \quad 即\ h_{ijk}^{n+1} = 0, \tag{1.10}$$

$$\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij} = 0,在\ x_0\ 点. \tag{1.11}$$

式(1.10)表示 h_{ij}^{n+1}是协变常数.对于条件(1),因 $c>0$,又 $\lambda_i>0$,所以 $R_{ijij} = C + \lambda_i\lambda_j > 0$;对于条件(2),有 $R_{ijij}>0$,由式(1.11)得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n,在\ x_0\ 点. \tag{1.12}$$

所以 x_0 是 M^n 的一个脐点,再由式(1.2)得 $n(n-1)(\gamma - c) = -nH^2 + n^2H^2 = n(n-1)H^2$,即在极大点 x_0,有 $H^2 = \gamma - c$ 是常数,得

$$H^2 \leqslant \gamma - c,(任\ x \in M^n). \tag{1.13}$$

由式(1.2)得

$$\sum_i \lambda_i^2 = n^2H^2 - n(n-1)(\gamma - c) \leqslant n^2H^2 - n(n-1)H^2 = nH^2,$$

即

$$\sum_i \lambda_i^2 \leqslant nH^2. \tag{1.14}$$

由 Schwarz 不等式得

$$nH^2 = n\left(\frac{1}{n}\sum_i\lambda_i\right)^2 = \frac{1}{n}\Big(\sum_i\lambda_i\Big)^2 \leqslant \sum_i\lambda_i^2, \tag{1.15}$$

由式(1.14)及式(1.15)得

$$nH^2 = \sum_i \lambda_i^2, \tag{1.16}$$

$$\Leftrightarrow \quad n\left[\frac{1}{n}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\right]^2=(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^2=n(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1-\lambda_2)^2+(\lambda_1-\lambda_3)^2+\cdots+(\lambda_1-\lambda_n)^2+(\lambda_2-\lambda_3)^2+\cdots$$
$$+(\lambda_2-\lambda_n)^2+\cdots+(\lambda_{n-1}-\lambda_n)^2=0,$$

即

$$\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)^2=0. \tag{1.17}$$

因此得在任 $x \in M^n$，有 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$，故 M^n 是全脐超曲面，即 $M^n=S^n$.

3.8 常曲率黎曼流形中具有平行中曲率向量的子流形

1. $N^{n+p}(c)$ 中具有平行中曲率向量的紧致子流形.

设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行中曲率向量的子流形，即 $D^{\perp}\overline{H}=0$，由式(3.5.15)得

$$\sum_k h_{kkij}^{\alpha}=0, \alpha=n+1,\cdots,n+p, \tag{3.8.1}$$

在 $N^{n+p}(c)$ 中选取标准正交标架场 $e_1,\cdots,e_{n+p}$，使 $e_{n+p}=\frac{1}{H}\overline{H}$，且 $e_1,\cdots,e_n$ 切于 M^n，$e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$ 法于 M^n，$\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$ 是其对偶，由于

$$\overline{H}=He_{n+p}, \tag{3.8.2}$$

由式(3.8.2)和式(3.5.7)得

$$\mathrm{tr}H_{n+p}=\sum_k h_{kk}^{n+p}=nH, \tag{3.8.3}$$

$$\mathrm{tr}H_{\alpha}=\sum_k h_{kk}^{\alpha}=0, \alpha \neq n+p, \tag{3.8.4}$$

由式(3.8.2)得

$$D^{\perp}\bar{H} = \mathrm{d}H\cdot e_{n+p} + HD^{\perp}e_{n+p} = \mathrm{d}H\cdot e_{n+p} + H\sum_{\alpha}\omega_{n+p\,\alpha}e_{\alpha}.$$

所以若选择 e_{n+p}为单位平均曲率向量,则 M^n 是 $N^{n+p}(c)$中具有平行中曲率向量的子流形:$D^{\perp}\bar{H}=0$

$$\Leftrightarrow \quad H=\text{常数且}\quad \omega_{n+p\alpha}=0,\forall\alpha. \tag{3.8.5}$$

对 $\omega_{n+p\alpha}=0$ 外微分,由第二结构方程式(3.8.5)及式(3.2.23)得

$$\begin{aligned}0 = \mathrm{d}\omega_{n+p\alpha} &= \sum_{i}\omega_{n+pi}\wedge\omega_{i\alpha} + \sum_{\beta}\omega_{n+p\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha}\\ &= \sum_{i}\omega_{n+pi}\wedge\omega_{i\alpha} = -\sum_{i}\sum_{j,k}h_{ij}^{n+p}h_{ik}^{\alpha}\omega_j\wedge\omega_k\\ &= -\sum_{j<k}\sum_{i}[h_{ij}^{n+p}h_{ik}^{\alpha} - h_{ik}^{n+p}h_{ij}^{\alpha}]\omega_j\wedge\omega_k\\ &= -\sum_{j<k}R^{\perp}_{n+p\alpha jk}\ \omega_j\wedge\omega_k.\end{aligned}$$

所以有

$$R^{\perp}_{n+p\alpha jk}=0\quad(\text{或 } H_{n+p}H_{\alpha}=H_{\alpha}H_{n+p}). \tag{3.8.6}$$

由式(3.8.6)得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{\beta}\sum_{i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R^{\perp}_{\beta\alpha jk} &= \sum_{\alpha,\ \beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R^{\perp}_{\beta\alpha jk}\\ &= -\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}^2H_{\beta}^2)-\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^2],\end{aligned} \tag{3.8.7}$$

由式(3.3.25)、式(3.8.1)、式(3.8.4)及式(3.8.7)我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} = nc\tau &- 2\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}^2H_{\beta}^2)-\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^2]\\ &+ \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{\beta}\{\mathrm{tr}(H_{\alpha}^2H_{\beta})\mathrm{tr}H_{\beta} - [\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})]^2\},\end{aligned} \tag{3.8.8}$$

对于 $\alpha,\beta\neq n+p$,因 $H_{\alpha\beta}=(\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta}))$是 $p-1$ 阶对称方阵,故可选取法标架场 $e_{n+1},\cdots,e_{n+p-1}$,使

$$\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})=\mathrm{tr}H_{\alpha}^2\cdot\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.8.9}$$

类似于定理 3.3.1 的证明,我们有:

定理 3.8.1 设(M^n,g)是$(N^{n+p},\bar{g})$的 Riemann 子流形

$(p\geqslant 2)$，$\tau=\sum\limits_{\alpha\neq n+p}\operatorname{tr}H_\alpha^2$，则下面的各不等式成立：

(1) $\frac{1}{p-1}\tau^2\leqslant\sum\limits_{\alpha\neq n+p}[\operatorname{tr}H_\alpha^2]^2\leqslant\tau^2$.

(2) $0\leqslant\sum\limits_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]$

$$\leqslant\sum_{\substack{\alpha,\beta\neq n+p\\ \alpha\neq\beta}}(\operatorname{tr}H_\alpha^2)(\operatorname{tr}H_\beta^2)=\tau^2-\sum_{\alpha\neq n+p}[\operatorname{tr}H_\alpha^2]^2.$$

(3) $\sum\limits_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]\leqslant\frac{p-2}{p-1}\tau^2$.

(4) $\sum\limits_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]\leqslant\frac{n}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2$.

定理 3.8.2 (S. T. Yau)设 M^n 是 $N^{n+p}(1)$ 中具有单位平行平均曲率向量的紧致子流形 $(p\geqslant 2)$. 若 M^n 的第二基本形式模长的平方 σ 满足

$$\sigma\leqslant\frac{n}{3+n^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{p-1}},\tag{3.8.10}$$

则 M^n 位于 $N^{n+p}(1)$ 的全测地子流形 $N^{n+1}(1)$ 中.

证明：设 $\bar{H}=e_{n+p}$，则 $H=\frac{1}{n}\sum\limits_i h_{ii}^{n+p}=1$，且对一切 $\beta\neq n+p$，有 $\operatorname{tr}H_\beta=\sum\limits_i h_{ii}^\beta=0$，由式(3.8.8)得

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha\\ =\ &n\tau-2\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]-\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2\\ &+\sum_{\alpha\neq n+p}\{\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_{n+p})\operatorname{tr}H_{n+p}-[\operatorname{tr}(H_\alpha H_{n+p})]^2\},\end{aligned}\tag{3.8.11}$$

对固定的 $\alpha\neq n+p$，令 $h_{ij}^\alpha=\lambda_i^\alpha\delta_{ij}$，由 Schwarz 不等式及

$$\sum_i(h_{ii}^\alpha)^4\leqslant\Big[\sum_i(h_{ii}^\alpha)^2\Big]^2.\tag{3.8.12}$$

我们有

$$\left|\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_{n+p})\operatorname{tr}H_{n+p}-[\operatorname{tr}(H_\alpha H_{n+p})]^2\right|$$

$$= \left| \sum_i \sum_{j,k} h_{ij}^\alpha h_{jk}^\alpha h_{ki}^{n+p} \sum_l h_{ll}^{n+p} - \left(\sum_{i,j} h_{ij}^\alpha h_{ji}^{n+p} \right)^2 \right|$$

$$= \left| \sum_i (h_{ii}^\alpha)^2 h_{ii}^{n+p} \sum_j h_{jj}^{n+p} - \left(\sum_i h_{ii}^\alpha h_{ii}^{n+p} \right)^2 \right|$$

$$\leqslant \left[\sum_i (h_{ii}^\alpha)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_i (h_{ii}^{n+p})^2 \right]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \left[\sum_j (h_{jj}^{n+p})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sum_i (h_{ii}^\alpha)^2 \sum_i (h_{ii}^{n+p})^2$$

$$\leqslant \sum_i (h_{ii}^\alpha)^2 n^{\frac{1}{2}} \sum_i (h_{ii}^{n+p})^2 + \sum_i (h_{ii}^\alpha)^2 \sum_i (h_{ii}^{n+p})^2$$

$$\leqslant (1 + n^{\frac{1}{2}}) \sum_{i,j} (h_{ij}^\alpha)^2 \sum_{i,j} (h_{ij}^{n+p})^2. \tag{3.8.13}$$

因为 $\tau \leqslant \sigma$,$\mathrm{tr}H_{n+p}^2 \leqslant \sigma$,由式(3.8.11),式(3.8.9),式(3.8.13)及定理3.8.1的(2)和(1)得

$$\sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \Delta h_{ij}^\alpha$$

$$\geqslant n\tau - 2\left[\tau^2 - \sum_{\alpha \neq n+p} (\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 \right] - \sum_{\alpha \neq n+p} (\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2$$

$$- (1 + n^{\frac{1}{2}}) \tau \cdot \mathrm{tr}H_{n+p}^2$$

$$\geqslant n\tau - 2\tau^2 + \frac{1}{p-1}\tau^2 - (1 + n^{\frac{1}{2}}) \tau\sigma$$

$$\geqslant n\tau - \left(2 - \frac{1}{p-1} \right) \tau\sigma - (1 + n^{\frac{1}{2}}) \tau\sigma$$

$$= \tau \left[n - \left(3 + n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{p-1} \right) \sigma \right].$$

在条件式(3.8.10)下,得

$$\frac{1}{2}\Delta\tau = \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \Delta h_{ij}^\alpha$$

$$\geqslant \sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + \tau \left[n - \left(3 + n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{p-1} \right) \sigma \right] \geqslant 0 \tag{3.8.14}$$

由 Hopf 引理 2.5.1 得 τ = 常数,所以 $\Delta\tau = 0$,由式(3.8.13)得

$$h_{ijk}^\alpha = 0 (h_{ij}^\alpha \text{为常数}) \alpha \neq n + p \tag{3.8.15}$$

及

$$\tau \left[n - \left(3 + n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{p-1} \right) \sigma \right] = 0 \tag{3.8.16}$$

当 $\sigma<\dfrac{n}{3+n^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{p-1}}$ 时,得 $\tau=0$,当 $\sigma=\dfrac{n}{3+n^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{p-1}}$ 时,不等式(3.8.12)为等式,即

$$\sum_i (h_{ii}^\alpha)^4 = \left[\sum_i (h_{ii}^\alpha)^2\right]^2 = \sum_i (h_{ii}^\alpha)^4 + \sum_{i\neq j} (h_{ii}^\alpha)^2 (h_{jj}^\alpha)^2$$

得至少 $n-1$ 个 $h_{ii}^\alpha=0$,又因为 $\sum_i h_{ii}^\alpha=0$,所以 $h_{ii}^\alpha=0$,即 $h_{ij}^\alpha=0$,故在条件式(3.8.10)下,有

$$\tau=\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}(h_{ij}^\alpha)^2=0. \qquad (3.8.17)$$

根据 J. Erbacher 的一个定理(见《*J. Diff. Geom. V*》(1971),333~340)知,M^n 位于 $N^{n+p}(1)$ 的一个全测地子流形 $N^{n+1}(1)$ 中.

许洪伟(见《数学年刊》,12A,3(1991),261~269)改进了定理 3.8.2 的 Pinching 常数,得到:

定理 3.8.3 设 M^n 是球面 $S^{n+p}(1)$ 中具有平行平均曲率向量的紧致子流形($p\geqslant 2$),若

$$\sigma\leqslant\min\left\{\frac{2n}{1+\sqrt{n}},\frac{n}{2-\dfrac{1}{p-1}}\right\}, \qquad (3.8.18)$$

则 M^n 包含在一个 $n+1$ 维的大球面 $S^{n+1}(1)$ 中.

莫小欢(见《数学年刊》9A(5),1988,530~540)对定理 3.8.2 也作了改进,得到

定理 3.8.4 设 M^n 是 $S^{n+p}(1)$ 中具有平行平均曲率向量的紧致子流形($P\geqslant 2$),若

$$\sigma\leqslant\max\left\{\frac{n(1+2H^2)}{\sqrt{n}+1},\frac{n(1+H^2)}{\sqrt{n-1}+1}\right\}, \qquad (3.8.19)$$

则 M^n 位于 $S^{n+p}(1)$ 的一个 $n+1$ 维全测地子流形 $S^{n+1}(1)$ 中.

徐森林教授(见《微分几何》,中国科学技术大学出版社,1997 年)对定理 3.8.2 作了更进一步的改进如下,为此先证明下面的引理

引理 3.8.1 设 $a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_n$ 是 $2n$ 个实数,满足 $\sum_{i=1}^n b_i=0$,则有:

$$\left[\sum_{i,j}a_ia_j(b_i-b_j)^2\right]^2\leqslant 2(n+3)\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^2\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^2.$$

证明:根据 Schwarz 不等式及 $\sum_i b_i=0$,我们有

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i,j}a_ia_j(b_i-b_j)^2\right]^2=\left[\sum_j a_j\sum_i a_i(b_i-b_j)^2\right]^2\\
&\triangleq\left[\sum_j a_jc_j\right]^2\leqslant\sum_j a_j^2\sum_j c_j^2=\sum_j a_j^2\sum_j\left[\sum_i a_i(b_i-b_j)^2\right]^2\\
&\leqslant\sum_j a_j^2\sum_j\sum_i a_i^2\sum_i(b_i-b_j)^4=\left(\sum_i a_i^2\right)^2\sum_{i,j}(b_i-b_j)^4\\
&=\left(\sum_i a_i^2\right)^2\sum_{i,j}\left[b_i^4-4b_i^3b_j+6b_i^2b_j^2-4b_ib_j^3+b_j^4\right]\\
&=\left(\sum_i a_i^2\right)^2\left[2n\sum_i b_i^4+6\left(\sum_j b_j^2\right)^2\right]\\
&\leqslant 2(n+3)\left(\sum_i a_i^2\right)^2\left(\sum_j b_j^2\right)^2.
\end{aligned}$$

定理 3.8.5 设 M^n 是 $S^{n+p}(1)$中具有平行平均曲率向量的紧致子流形,$P\geqslant 2$,$n\geqslant 2$,如果

$$\sigma\leqslant\min\left\{\frac{1}{2-\dfrac{1}{p-1}},\frac{n}{\sqrt{\dfrac{n+3}{2}}}\right\},\tag{3.8.20}$$

则 M^n 位于$S^{n+p}(1)$的全测地子流形 $S^{n+1}(1)$中.

证明:对固定的 $\alpha\neq n+p$,令 $h_{ij}^\alpha=\lambda_i^\alpha\delta_{ij}$,则有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_{n+p})\operatorname{tr}H_{n+p}-[\operatorname{tr}(H_\alpha H_{n+p})]^2\\
&=\sum_{i,j}h_{ii}^{n+p}h_{jj}^{n+p}(h_{ii}^\alpha)^2-\left(\sum_i h_{ii}^{n+p}h_{ii}^\alpha\right)^2\\
&=\sum_{i,j}\left[h_{ii}^{n+p}h_{jj}^{n+p}(h_{ii}^\alpha)^2-h_{ii}^{n+p}h_{ii}^\alpha h_{jj}^{n+p}h_{jj}^\alpha\right]\\
&=\frac12\sum_{i,j}h_{ii}^{n+p}h_{jj}^{n+p}(h_{ii}^\alpha-h_{jj}^\alpha)^2.
\end{aligned}$$

由式(3.8.4)得 $\sum_i h_{ii}^\alpha=0$,由引理 3.8.1 得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_{n+p})\operatorname{tr}H_{n+p}-[\operatorname{tr}(H_\alpha H_{n+p})]^2\\
&\geqslant-\frac{\sqrt{2(n+3)}}{2}\sum_i(h_{ii}^{n+p})^2\sum_j(h_{jj}^\alpha)^2
\end{aligned}$$

$$\geqslant -\sqrt{\frac{n+3}{2}}\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+p})^2\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2. \tag{3.8.21}$$

由式(3.8.11),式(3.8.9),式(3.8.20)及定理 3.8.1 的(1)和(2)得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} \geqslant n\tau - 2\left[\tau^2 - \sum_{\alpha\neq n+p}(trH_\alpha^2)^2\right] - \sum_{\alpha\neq n+p}(trH_\alpha^2)^2$$
$$+ \sum_{\alpha\neq n+p}\left\{tr(H_\alpha H_{n+p})trH_{n+p} - [\mathrm{tr}(H_\alpha H_{n+p})]^2\right\}$$
$$\geqslant n\tau - 2\tau^2 + \frac{1}{p-1}\tau^2 - \sqrt{\frac{n+3}{2}}\tau\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+p})^2$$
$$= \tau\left\{n - \left(2-\frac{1}{p-1}\right)\tau - \sqrt{\frac{n+3}{2}}\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+p})^2\right\}.$$

令常数

$$C_{np} = \max\left\{2-\frac{1}{p-1}, \sqrt{\frac{n+3}{2}}\right\},$$

在条件式(3.8.19)下,有

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} \geqslant \tau[n - C_{np}\sigma] \geqslant 0 .$$

同定理 3.8.2 的证明,易得 $\tau=0$,所以结论成立.

由式(3.8.1)和式(3.8.6),式(3.3.25)为

$$\sum_{i,j}h_{ij}^{n+p}\Delta h_{ij}^{n+p} = \sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{n+p}(h_{mk}^{n+p}R_{mijk} + h_{im}^{n+p}R_{mkjk}). \tag{3.8.22}$$

定理 3.8.6 设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行中曲率向量的紧致正曲率子流形.则 M^n 是伪脐子流形,即

$$h_{ij}^{n+p} = H\delta_{ij}. \tag{3.8.23}$$

证明: 设 $\overline{H} = He_{n+p}$,则有

$$\sum_i h_{ii}^{n+p} = nH, \sum_i h_{ii}^{\alpha} = 0, \alpha \neq n+p, \tag{1}$$

因为 $H_{n+p} = (h_{ij}^{n+p})$是n 阶对称方阵,所以可设 $h_{ij}^{n+p} = \lambda_i\delta_{ij}$,由式(3.8.22) 得

$$\frac{1}{2}\Delta\left[\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+p})^2\right] = \frac{1}{2}\sum_k\left[\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+p})^2\right]_{kk}$$

$$= \sum_k \Big[\sum_{i,j} h_{ij}^{n+p} h_{ijk}^{n+p}\Big]_k = \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+p})^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+p} \Delta h_{ij}^{n+p}$$

$$= \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+p})^2 + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{n+p}(h_{mk}^{n+p} R_{mijk} + h_{im}^{n+p} R_{mkjk})$$

$$= \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+p})^2 + \sum_{i,k} \lambda_i (\lambda_k R_{kiik} + \lambda_i R_{ikik})$$

$$= \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+p})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\lambda_i - \lambda_k)^2 R_{ikik} \geqslant 0. \tag{2}$$

由 Hopf 引理 2.5.1 得

$$\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+p})^2 = \text{常数}, \Delta\Big(\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+p})^2\Big) = 0 \tag{3}$$

由式(2)和式(3)得

$$h_{ijk}^{n+p} = 0, \qquad h_{ij}^{n+p} = \text{常数} \tag{4}$$

$$\sum_{i,k}(\lambda_i - \lambda_k)^2 R_{ikik} = 0 \tag{5}$$

因为 M^n 是正曲率,即 $R_{ikik} > 0$,由式(5)和式(1)得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = H \tag{6}$$

即 $h_{ij}^{n+p} = H\delta_{ij}$,所以 M^n 关于中曲率向量 $\overline{H}$ 是全脐的,故 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 的伪脐子流形.

2. $N^{n+p}(c)$ 中具有平行中曲率向量的伪脐子流形.

在 $N^{n+p}(c)$ 上选取标准正交标架场 $e_1, \cdots, e_{n+p}$,使

$$\overline{H} = He_{n+p} \tag{3.8.24}$$

则得

$$\mathrm{tr}H_{n+p} = \sum_i h_{ii}^{n+p} = nH; \mathrm{tr}H_\alpha = \sum_i h_{ii}^\alpha = 0, \alpha \neq n+p \tag{3.8.25}$$

设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行中曲率向量的子流形,则

$$\sum_k h_{kkij}^\alpha = 0; H = \text{常数}; R_{n+p\alpha jk}^{\perp} = 0, \tag{3.8.26}$$

再设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 的伪脐子流形,由式(3.8.24)得

$$h_{ij}^{n+p} = H\delta_{ij}. \tag{3.8.27}$$

由式(3.8.27)可得下面几式成立:

$$\operatorname{tr}H_{n+p}^2 = nH^2; \qquad \tau = \sigma - nH^2, \qquad (3.8.28)$$

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\{\operatorname{tr}(H_\alpha^2 H_{n+p})\operatorname{tr}H_{n+p} - [\operatorname{tr}(H_\alpha H_{n+p})]^2\} = n\tau H^2. \qquad (3.8.29)$$

由式(3.8.8),式(3.8.25),式(3.8.29)(或式(3.3.28))得,对任意实数 a,有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha &= -an(c+H^2)\tau + a\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2 \\ &\quad + (1+a)\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha R_{mijk} + h_{mi}^\alpha R_{mkjk}) \\ &\quad - (1-a)\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2) - \operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2].\end{aligned} \qquad (3.8.30)$$

定理 3.8.7 设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行中曲率向量的紧致伪脐子流形($p\geqslant 2$),若 M^n 的第二基本形式模长的平方 σ 满足

$$\sigma\leqslant\frac{n}{3p-5}[(p-1)c+(4p-6)H^2] \qquad (*)$$

则 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐子流形.

证明:在式(3.8.30)中,取 $a=-1$,由式(3.8.9),式(3.8.28)及定理 3.8.1 的(1)和(3)得:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha &= n\tau(n+H^2) - \sum_{\alpha\neq n+p}[\operatorname{tr}H_\alpha^2]^2 \\ &\quad - 2\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2) - \operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2] \\ &\geqslant n\tau(c+H^2) - \tau^2 - \frac{2(p-2)}{p-1}\tau^2 \\ &= n\tau(c+H^2) - \frac{3p-5}{p-1}\tau(\sigma - nH^2) \\ &= \frac{3p-5}{p-1}\tau\left\{\frac{n}{3p-5}[(p-1)c+(4p-6)H^2] - \sigma\right\},\end{aligned}$$

在定理 3.8.8 的条件($*$)下,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\tau &= \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha \\ &\geqslant \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \frac{3p-5}{p-1}\tau\left\{\frac{n}{3p-5}[(p-1)c\right.\end{aligned}$$

$$+(4p-6)H^2]-\sigma\}$$

$$\geqslant 0, \tag{1}$$

由 Hopf 引理 2.5.1 得 $\tau=$ 常数，所以 $\Delta\tau=0$，由式(1)得

$$h^{\alpha}_{ijk}=0(h^{\alpha}_{ij}=\text{常数}),\alpha\neq n+p \tag{2}$$

$$\tau\left\{\frac{n}{3p-5}[(p-1)c+(4p-6)H^2]-\sigma\right\}=0 \tag{3}$$

由式(3)知，当 $\sigma<\frac{n}{3p-5}[(p-1)c+(4p-6)H^2]$ 时，$\tau=0$；当 $\sigma=\frac{n}{3p-5}[(p-1)c+(4p-6)H^2]$ 时，定理 3.8.1 的式(1)和式(3)成等式，得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\neq n+p}[\mathrm{tr}H_\alpha^2]^2&=\Big[\sum_{\alpha\neq n+p}\mathrm{tr}H_\alpha^2\Big]^2\\&=\sum_{\alpha\neq n+p}[\mathrm{tr}H_\alpha^2]^2+\sum_{\alpha\neq\beta}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)(\mathrm{tr}H_\beta^2).\end{aligned} \tag{4}$$

及式(3.3.29)为等式，即对 $\alpha\neq n+p$ 有

$$(\lambda_i^\alpha-\lambda_k^\alpha)^2=2[(\lambda_i^\alpha)^2+(\lambda_k^\alpha)^2]=2\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^\alpha)^2. \tag{5}$$

由式(4)得 $p-2$ 个 $\mathrm{tr}H_\alpha^2=0$，不妨设

$$\mathrm{tr}H_{n+2}^2=\cdots=\mathrm{tr}H_{n+p-1}^2=0. \tag{6}$$

由式(5)得

$$\lambda_i^{n+1}=-\lambda_k^{n+1},(\lambda_i^{n+1})^2+(\lambda_k^{n+1})^2=\sum_j(\lambda_j^{n+1})^2. \tag{7}$$

$i,k=1,\cdots,n$. 由式(7)得 $\lambda_i^{n+1}=0,i=1,\cdots,n$. 再由式(6)得 $\tau=0$，又 M^n 是伪脐子流形，所以式(3.8.27)成立，故 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐子流形.

注 由式(3.7.2)，条件(*)等价于

$$\gamma\geqslant\frac{n}{3p-5}[(3p-5)n-(4p-6)](c+H^2). \tag{3.8.31}$$

类似可得下面定理成立.

定理 3.8.8 设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行中曲率向量的紧致伪脐子流形($p\geqslant 2$)，若下列条件之一满足：

(1) $\sigma\leqslant\frac{n}{2p-3}[(p-1)c+(3p-4)H^2]$,

(2) $\sigma\leqslant\frac{n}{n+1}[c+(n-2)H^2]$.

则 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐子流形.

引理 3.8.2 设 M^n 是 N^{n+p} 的子流形, R_M 为 M^n 上每点截面曲率 R_{ijij} 的下确界,则

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{km}^{\alpha}R_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})\geqslant n\tau R_M. \quad (3.8.32)$$

证明:对固定的 $\alpha\neq n+p$,令 $h_{ij}^{\alpha}=\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$,又 $R_{ijij}\geqslant R_M$,由式(3.8.25)得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{km}^{\alpha}R_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})\\
&=\sum_{i,k}(\lambda_i^{\alpha}\lambda_k^{\alpha}R_{kiik}+\lambda_i^{\alpha}\lambda_i^{\alpha}R_{ikik})\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_k^{\alpha})^2R_{ikik}\\
&\geqslant nR_M\sum_i(\lambda_i^{\alpha})^2-R_M\sum_i\lambda_i^{\alpha}\sum_k\lambda_k^{\alpha}\\
&=nR_M\mathrm{tr}H_{\alpha}^2,
\end{aligned}$$

两边对 α 求和便得式(3.8.31).

定理 3.8.9 设 M^n 是 $N^{n+p}(C)$ 中具有平行中曲率向量的伪脐子流形($p\geqslant2$),若 M^n 的截面曲率 R_{ijij} 满足

$$R_{ijij}\geqslant\frac{p-2}{2p-3}(c+H^2), \quad (3.8.33)$$

则 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐子流形.

证明:对于 $a:0\leqslant a<1$,由式(3.8.30),式(3.8.32)及定理3.8.1的式(1)和式(3)得

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant&-an(c+H^2)\tau+a\frac{1}{p-1}\tau^2+(1+a)n\tau R_M\\
&-(1-a)\frac{p-2}{p-1}\tau^2\\
=&-an(c+H^2)\tau+(1+a)n\tau R_M
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{p-1}[a(p-1)-(p-2)]\tau^2.$$

取 $a=\frac{p-2}{p-1}$,并在条件式(3.8.33)下,有

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$\geqslant-\frac{p-2}{p-1}n(c+H^2)\tau+\frac{2p-3}{p-1}n\tau R_M$$

$$=\frac{2p-3}{p-1}n\tau\left[R_M-\frac{p-2}{2p-3}(c+H^2)\right]\geqslant 0.$$

因 $R_{ijij}\geqslant R_M$,同定理 3.8.7 的证明易得 $\tau=0$,又 M^n 伪脐,所以 M^n 是 $N^{n+p}(c)$的全脐子流形.

注 当 $R_{ijij}\geqslant R_M=\frac{p-2}{2p-3}(c+H^2)$时,可得

$$(\lambda_i^{\alpha})^2+(\lambda_k^{\alpha})^2=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{\alpha})^2,\lambda_i^{\alpha}=-\lambda_k^{\alpha}.$$

$i,k=1,\cdots,n;\alpha=n+1,\cdots,n+p-1$,所以 $trH_{\alpha}^2=0,\tau=0$.

同理可证下面定理成立.

定理 3.8.10 设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$中具有平行中曲率向量的伪脐子流形,若

$$R_{ijij}\geqslant\frac{n}{2(n+1)}(c+H^2),\tag{3.8.34}$$

则 M^n 是 $N^{n+p}(c)$的全脐子流形.

引理 3.8.3 设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$中的伪脐子流形. Q 为 M^n 上每点 Ricci 曲率 R_{ii}的下确界,则

(1) $\tau\leqslant n(n-1)(c+H^2)-nQ$.

(2) $\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}^2H_{\beta}^2)-\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^2]$

$\leqslant 2[(n-1)(c+H^2)-Q]\tau.$

证明:(1) 设 $\overline{H}=He_{n+p}$,则

$$\mathrm{tr}H_{n+p}=\sum_i h_{ii}^{n+p}=nH\tag{1}$$

$$\mathrm{tr}H_{\alpha}=\sum_i h_{ii}^{\alpha}=0,\alpha\neq n+p\tag{2}$$

因为 M^n 是伪脐子流形，所以

$$h_{ij}^{n+p}=H\delta_{ij}, \tag{3}$$

由式(2)得 $\sum_{j\neq i}h_{jj}^{\alpha}=-h_{ii}^{\alpha}(\alpha\neq n+p)$，由式(3)及 Gauss 方程得

$$Q\leqslant R_{ii}=\sum_{j\neq i}R_{ijij}=(n-1)c+\sum_{\beta}\sum_{j\neq i}\left[h_{ii}^{\beta}h_{jj}^{\beta}-(h_{ij}^{\beta})^2\right]$$

$$=(n-1)c+h_{ii}^{n+p}\sum_{j\neq i}h_{jj}^{n+p}-\sum_{j\neq i}(h_{ij}^{n+p})^2$$

$$+\sum_{\beta\neq n+p}\left[h_{ii}^{\beta}\sum_{j\neq i}h_{jj}^{\beta}-\sum_{j\neq i}(h_{ij}^{\beta})^2\right]$$

$$=(n-1)c+(n-1)H^2-0+\sum_{\beta\neq n+p}\left[-(h_{ii}^{\beta})^2-\sum_{j\neq i}(h_{ij}^{\beta})^2\right]$$

$$=(n-1)(c+H^2)-\sum_{\beta\neq n+p}\sum_{j}(h_{ij}^{\beta})^2, \tag{4}$$

由式(4)得

$$\sum_{\beta\neq n+p}\sum_{j}(h_{ij}^{\beta})^2\leqslant(n-1)(c+H^2)-Q, \tag{5}$$

对式(5)两边关于 i 求和得 $\tau\leqslant n(n-1)(c+H^2)-nQ$.

(2) 对固定的 $\alpha\neq n+p$，令 $h_{ij}^{\alpha}=\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$，因为

$$(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})^2\leqslant2\left[(\lambda_i^{\alpha})^2+(\lambda_j^{\alpha})^2\right], \tag{6}$$

从而

$$\operatorname{tr}(H_{\alpha}^2H_{\beta}^2)-\operatorname{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})^2(h_{ij}^{\beta})^2$$

$$\leqslant\sum_{i,j}(\lambda_i^{\alpha})^2(h_{ij}^{\beta})^2+\sum_{i,j}(\lambda_j^{\alpha})^2(h_{ij}^{\beta})^2=2\sum_{i}\left[\sum_{j}(h_{ij}^{\beta})^2\right](\lambda_i^{\alpha})^2,$$

两边关于 $\beta(\beta\neq n+p)$ 求和，并由(5)式得

$$\sum_{\beta\neq n+p}\left[\operatorname{tr}(H_{\alpha}^2H_{\beta}^2)-\operatorname{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^2\right]$$

$$\leqslant2\sum_{i}\left[\sum_{\beta\neq n+p}\sum_{j}(h_{ij}^{\beta})^2\right](\lambda_i^{\alpha})^2$$

$$\leqslant2\sum_{i}\left[(n-1)(c+H^2)-Q\right](\lambda_i^{\alpha})^2$$

$$=2\left[(n-1)(c+H^2)-Q\right]\operatorname{tr}H_{\alpha}^2,$$

两边关于 $\alpha(\alpha\neq n+p)$ 求和便得所求结果.

定理 3.8.11 设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行中曲率向量的

紧致伪脐子流形,若 M^n 的 Ricci 曲率 R_{ii}满足

$$R_{ii} \geqslant \frac{n^2+2n-4}{n+4} \quad (c+H^2), \tag{3.8.35}$$

则 M^n 是$N^{n+p}(c)$的全脐子流形.

证明:在式(3.8.29)中,取 $a=-1$,由定理 3.8.1 的(1)和引理 3.8.3 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} \\
&= n(c+H^2)\tau - \sum_{\alpha\neq n+p}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 - 2\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) \\
&\quad - \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2] \\
&\geqslant n(c+H^2)\tau - \tau[n(n-1)(c+H^2) - nQ] \\
&\quad - 4[(n-1)(c+H^2) - Q]\tau \\
&= \tau\{(n+4)Q - (n^2+2n-4)\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

在条件式(3.8.34)下

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\tau &= \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} \\
&\geqslant \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \tau[(n+4)Q - (n^2+2n-4)] \geqslant 0
\end{aligned} \tag{2}$$

由 Hopf 引理 2.5.1 得 $\tau=$常数,所以 $\Delta\tau=0$,由式(2)得

$$h_{ijk}^{\alpha}=0 \qquad (h_{ij}^{\alpha}=\text{常数}), \tag{3}$$

$$\tau[(n+4)Q-(n^2+2n-4)]=0. \tag{4}$$

当 $R_{ii}\geqslant Q > \dfrac{n^2+2n-4}{n+4}$ 时,由式(4)得 $\tau=0$;当 $R_{ii}\geqslant Q = \dfrac{n^2+2n-4}{n+4}$时,式(1)中所用不等式均为等式,从而得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}[\mathrm{tr}H_\alpha^2]^2 = \Big[\sum_{\alpha\neq n+p}\mathrm{tr}H_\alpha^2\Big]^2 = \sum_{\alpha\neq n+p}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 + \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)(\mathrm{tr}H_\beta^2) \tag{5}$$

及

$$(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})^2 = 2[(\lambda_i^{\alpha})^2+(\lambda_j^{\alpha})^2], \tag{6}$$

又 $\sum_i \lambda_i^\alpha = 0, \alpha \neq n+p$，所以

$$\sum_i (\lambda_i^\alpha)^2 + 2\sum_{i<j} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha = 0. \tag{7}$$

由式(5)、式(6)、式(7)得 $\tau = 0$，又 M^n 伪脐，再由式(3.8.26)得知，M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐子流形.

同理可证下面定理成立.

定理 3.8.12 设 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行中曲率向量的紧致伪脐子流形，若下列条件之一满足：

(1) $R_{ii} \geqslant \left[(n-1) - \frac{p-1}{3p-5}\right](c+H^2)$，

(2) $R_{ii} \geqslant \frac{n^2-2}{n+1}(c+H^2)$.

则 M^n 是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐子流形.

3.9 欧氏空间 R^{n+p} 中的极小子流形

1. R^{n+p} 中极小子流形的充要条件

设 (M^n, g) 是欧氏空间 $(R^{n+p}, \bar{g})$ 中的 Riemann 子流形，$\delta_1, \cdots, \delta_{n+p}$ 是 R^{n+p} 中的固定的标准正交标架，$x = (x_1, \cdots, x_{n+p}): M^n \longrightarrow R^{n+p}$ 是 M^n 的位置向量，则 $x = \sum_A x_A \delta_A$，从而

$$x_A = \bar{g}(x, \delta_A), A = 1, \cdots, n+p, \tag{3.9.1}$$

此处 x 相当于映射，x_A 相当于分量函数.

当 M^n 是 R^{n+p} 中的极小子流形时，由式(3.7.2)得

$$\gamma = -\sigma. \tag{3.9.2}$$

定理 3.9.1 设 $x: M^n \to R^{n+p}$ 为等距浸入(x 是 M^n 的位置向量)，$\overline{H}$ 是 M^n 的平均曲率向量场，Δ 为 M^n 上的 Laplacian 算子，则

$$\Delta x = n\overline{H}. \tag{3.9.3}$$

其中 $\Delta x \triangleq (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n+p})$.

证法 1：在 R^{n+p} 中取固定向量 a，作函数

$$f=\bar{g}(x,a) \tag{3.9.4}$$

为了计算 Δf,外微分式(3.9.4)得

$$\mathrm{d}f = \bar{g}(\mathrm{d}x,a) = \bar{g}\left(\sum_i \omega_i e_i, a\right)$$
$$= \sum_i \bar{g}(e_i,a)\omega_i \triangleq \sum_i f_i\omega_i.$$

其中

$$f_i=\bar{g}(e_i,a), i=1,\cdots,n \tag{3.9.5}$$

称为 f 的共变导数,而 f_i 的共变导数 f_{ij} 为

$$\sum_j f_{ij}\omega_j = \mathrm{d}f_i + \sum_j f_j\omega_{ji} = \bar{g}(\mathrm{d}e_i,a) + \sum_j \bar{g}(e_j,a)\omega_{ji}$$
$$= \sum_j \bar{g}(\omega_{ij}e_j,a) + \sum_\alpha \bar{g}(\omega_{i\alpha}e_\alpha,a) + \sum_j \bar{g}(e_j,a)\omega_{ji}$$
$$= \sum_\alpha \omega_{i\alpha}\,\bar{g}(e_\alpha,a) = \sum_\alpha \sum_j h^\alpha_{ij}\bar{g}(e_\alpha,a)\omega_j.$$

因此

$$f_{ij} = \sum_\alpha h^\alpha_{ij}\bar{g}(e_\alpha,a). \tag{3.9.6}$$

由此得 Δf 的表达式为

$$\Delta f = \sum_i f_{ii} = \sum_\alpha \sum_i h^\alpha_{ii}\bar{g}(e_\alpha,a) = \bar{g}(n\overline{H},a) \tag{3.9.7}$$

由于 $f=\bar{g}(x,a)$,$\Delta f=\bar{g}(\Delta x,a)$,所以式(3.9.7)等价于

$$\Delta\bar{g}(x,a)=\bar{g}(n\overline{H},a)\text{或 }\Delta x=n\overline{H}. \tag{3.9.8}$$

证法 2:设 $e_1,\cdots,e_n$ 为 M^n 的局部标准正交标架场,∇和$\overline{\nabla}$分别为 M^n 和 R^{n+p}上的 Riemann 联络,因 x 是等距映射,所以可记 $\mathrm{d}x(e_i)=e_i$,即

$$e_ix=(e_ix_1,\cdots,e_ix_{n+p})=\mathrm{d}x(e_i)=e_i, e_i(e_ix)=\overline{\nabla}_{e_i}e_i.$$

则由式(2.5.14)得

$$\Delta x = \sum_i\left[e_i(e_ix)-(\nabla_{e_i}e_i)x\right] = \sum_i\left(\overline{\nabla}_{e_i}e_i - \nabla_{e_i}e_i\right)x$$
$$= \sum_i\left(\overline{\nabla}_{e_i}e_i\right)^\perp = \sum_i h(e_i,e_i) = n\overline{H}.$$

定理 3.9.2 (Takahashi, 1966)设 $x:M^n\to R^{n+p}$是等距浸

入，则 x（或 $x(M^n)$，M^n）为 R^{n+p} 的极小子流形

$\Leftrightarrow \quad \Delta x=0$，即

$$\Delta x_A=0, A=1,\cdots,n+p \tag{3.9.9}$$

即 M^n 上的坐标函数 x_A 是 M^n 上的调和函数.

证明：由式(3.9.8)得

M^n 极小 $\Leftrightarrow \bar{H}=0 \Leftrightarrow \Delta x=0$.

取 $a=\delta_A$，而式(3.9.7)为 $\Delta\bar{g}(x,\delta_A)=\bar{g}(n\bar{H},\delta_A)$ 再由式(3.9.1)得

$$\bar{H}=0 \Leftrightarrow x_A=0, A=1,\cdots,n+p.$$

定理 3.9.3 R^{n+p} 中不存在紧致无边的极小子流形. 即：在紧致 Riemann 流形 M^n 上，不存在极小等距浸入 $x:M^n\to R^{n+p}$.

证法 1：假设 $x:M^n\to R^{n+p}$ 是极小浸入，a 为 R^{n+p} 中的固定向量，则 $f=\bar{g}(x,a)$ 为 M^n 上的函数，由定理 3.9.2 知，$\Delta f=0$，从而 $f\Delta f=0$，两边在 M^n 上积分得

$$0=\int_M f\Delta f\mathrm{d}v=\int_M\sum_i ff_{ii}\mathrm{d}v=-\int_M\sum_i f_i^2\mathrm{d}v.$$

因此 $f_i=0, i=1,\cdots,n$，即 f 是常值函数，因此 M 为一点，矛盾.

证法 2：假设 $x=(x_1,\cdots,x_{n+p}):M^n\to R^{n+p}$ 是等距极小浸入，由定理 3.9.2 知

$$\Delta x_A=0, A=1,\cdots,n+p.$$

即 x_A 是 M^n 上的调和函数，从而 x_A 为常数，所以 x 为常值映射，这与 x 与浸入相矛盾.

例 1 证明正螺面

$M^2=\{x=(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=u\cos v, x_2=u\sin v, x_3=av\}$ 是 R^3 中的极小曲面.

证明：M^2 上的度量为诱导度量，即

$$\begin{aligned} g &=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2=(\cos v\mathrm{d}u-u\sin v\mathrm{d}v)^2 \\ &\quad+(\sin v\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v)^2+(a\mathrm{d}v)^2 \\ &=\mathrm{d}u^2+(a^2+u^2)\mathrm{d}v^2. \end{aligned}$$

所以

$$g_{11}=1, g_{12}=g_{21}=0, g_{22}=a^2+u^2. \tag{1}$$

从而 $\det(g_{ij})=a^2+u^2$，所以

$$g^{11}=1, g^{12}=g^{21}=0, g^{22}=\frac{1}{a^2+u^2}. \tag{2}$$

由式(2.5.6)得

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{a^2+u^2}\,\frac{\partial}{\partial u}(u\cos v)\right]\right\} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{a^2+u^2}\cdot\frac{1}{a^2+u^2}\,\frac{\partial}{\partial v}(u\cos v)\right]\right\} \\ &= \frac{\cos v}{\sqrt{a^2+u^2}}\cdot\frac{2u}{2\sqrt{a^2+u^2}}-\frac{u\cos v}{a^2+u^2}=0\end{aligned}$$

同理得 $\Delta x_2=\Delta x_3=0$，由定理 3.9.2 知，M^2 是 R^3 中的极小曲面.

2. 欧氏空间 R^{n+1}中的极小超曲面

设 R^{n+1}中的子流形 M^n 为

$$M^n = \{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in R^{n+1}\mid x_{n+1}=f(x_1,\cdots,x_n)\},$$

其中 f 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的二阶光滑函数，M^n 也称为 R^{n+1}的一张图(超曲面). 由于

$$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \triangleq \sum_i f_i\mathrm{d}x_i,$$

其中 $f_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$，所以 M^n 的第一基本形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2+\mathrm{d}x_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^n\mathrm{d}x_i^2+\left(\sum_{i=1}^n f_i\mathrm{d}x_i\right)^2 \\ &= \sum_i\mathrm{d}x_i^2+\sum_i f_i^2\mathrm{d}x_i^2+\sum_{i\neq j}f_if_j\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \\ &= \sum_{i,j}(\delta_{ij}+f_if_j)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j.\end{aligned}$$

由此得在坐标标架场 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ 下，度量的分量为

$$g_{ij}=\delta_{ij}+f_if_j \tag{3.9.10}$$

记 $A\triangleq(f_1,\cdots,f_n)$，$A'$是$A$ 的转置，则 $AA'=\sum_i f_i^2$，式(3.9.10)写成矩阵形式为$(g_{ij})=I_n+A'A$，设(g_{ij})的逆矩阵$(g^{ij})=I_n+\lambda A'A$，则

$$\begin{aligned}I_n&=(g_{ij})(g^{ij})=(I_n+A'A)(I_n+\lambda A'A)\\&=I_n+(\lambda+1)A'A+\lambda A'AA'A\\&=I_n+[\lambda(1+AA')+1]A'A.\end{aligned}$$

得 $\lambda(1+AA')+1=0$，记 $W^2=1+\sum_i f_i^2=1+AA'$，我们得 $\lambda=-\frac{1}{W^2}$，故有

$$g^{ij}=\delta_{ij}-\frac{1}{W^2}f_if_j. \tag{3.9.11}$$

因为 M^n 的切向量场为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\triangleq x_{x_i}=(1,\cdots,0,1,0,\cdots,0,f_i).$$

$i=1,\cdots,n$，所以

$$e_{n+1}=\frac{1}{W}(f_1,\cdots,f_n,-1.) \tag{3.9.12}$$

是 M^n 上的单位法向量场，又因为

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\triangleq x_{x_ix_j}=(0,\cdots,0,f_{ij}),$$

其中 $f_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$，由式(3.6.9)，所以 $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}$在 e_{n+1}上的投影为

$$L_{ij}\triangleq\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j},e_{n+1}\right)=-\frac{1}{W}f_{ij}. \tag{3.9.13}$$

L_{ij}是 M^n 在坐标基$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$下的第二基本量，由式(3.6.23)、式(3.9.11)和式(3.9.13)得 M^n 的中曲率

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i,j}g^{ij}L_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}-\frac{1}{W^2}f_if_j\right)\left(-\frac{1}{W}f_{ij}\right)$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f_i}{W}\right). \tag{3.9.14}$$

注 1 因为 $\mathrm{d}x = \left(\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n, \sum_k f_k \mathrm{d}x_k\right)$，并且

$$\mathrm{d}e_{n+1} = -\frac{1}{W^2}\cdot\frac{1}{W}\sum_k f_k \sum_i f_{ki}\mathrm{d}x_i(f_1, \cdots, f_n, -1)$$

$$+\frac{1}{W}\left(\sum_j f_{1j}\mathrm{d}x_j, \cdots, \sum_j f_{nj}\mathrm{d}x_j, 0\right),$$

所以 M^n 在坐标基 $\{\mathrm{d}x_i\}$ 下的第二基本形式为

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= -\bar{g}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}e_{n+1}) \\
&= \frac{1}{W^3}\sum_k f_k \sum_i f_{ki}\mathrm{d}x_i\left[\sum_k f_k \mathrm{d}x_k - \sum_k f_k \mathrm{d}x_k\right] \\
&\quad -\frac{1}{W}\sum_{i,j} f_{ij}\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j \\
&= -\frac{1}{W}\sum_{i,j} f_{ij}\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j.
\end{aligned} \tag{3.9.15}$$

所以第二基本量 $L_{ij} = -\frac{1}{W}f_{ij}$.

注 2 计算 M^n 的中曲率 H，顺次求

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j},\ e_{n+1},\ L_{ij} = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}, e_{n+1}\right),$$

最后求 $H = \frac{1}{n}\sum_{i,j} g^{ij}L_{ij}$.

由式(3.9.14)我们得

定理 3.9.4 设 M^n 是 R^{n+1} 中的超曲面，其方程为 $x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)$，那么 M^n 是极小超曲面

$$\Leftrightarrow \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f_i}{W}\right) = 0, i = 1, \cdots, n, \tag{3.9.16}$$

其中 $W^2 = 1 + \sum_i f_i^2$，式(3.9.16) 等价于

$$\left[1 + \sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2\right]\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{3.9.17}$$

特别，当 $n=2$ 时，$M^2 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = f(x, y)\}$ 是 R^3 中的

极小曲面的充要条件是：

$$(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}=0, \qquad (3.9.18)$$

这就是古典微分几何中的极小曲面的方程.

注 R^3 中曲面 M^2 的显式方程 $z=f(x,y)$ 等价于参数方程

$$x(u,v)=(u,v,f(u,v)),$$

从而 $x_u=(1,0,f_u)$, $x_v=(0,1,f_v)$, $E_{11}=g_{11}=\bar{g}(x_u,x_u)=1+f_u^2$, $F=g_{12}=f_uf_v$, $G=g_{22}=1+f_v^2$, 法向量 $x_u\times x_v=(-f_u,-f_v,1)$, 单位法向量为

$$e_3=\frac{1}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}(-f_u,-f_v,1),$$

第二基本量

$$L=e_3\cdot x_{uu}=\frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, M=\frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}},$$

$$N=\frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}},$$

由微分几何中求曲面的中曲率的公式

$$H=\frac{GL-2FM+EN}{2(EG-F^2)}$$

知, M^n 极小 $\Leftrightarrow H=0 \Leftrightarrow GL-2FM+EN=0$

$$\Leftrightarrow \quad (1+f_v^2)f_{uu}-2f_uf_vf_{uv}+(1+f_u^2)f_{vv}=0. \qquad (3.9.19)$$

这正是式(3.9.18).

例 2 证明：正螺面 M^2: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ 是极小曲面.

证法 1：因为 M^2 的显式方程为

$$z=f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}, (x,y)\neq(0,0).$$

所以

$$f_x=\frac{-y}{x^2+y^2}, f_y=\frac{x}{x^2+y^2}, f_{xx}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{xy}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, f_{yy}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

从而

$$
\begin{aligned}
&(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}\\
=&\frac{(x^2+y^2)^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\\
&+\frac{(x^2+y^2)^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=0.
\end{aligned}
$$

由式(3.9.18)知,正螺面是 R^3 中的极小曲面.

证法 2:因为正螺面的参数方程为

$$x(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v),$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial u}=x_u=(\cos v,\sin v,0),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}=x_v=(-u\sin v,u\cos v,1).$$

得第一基本量

$$g_{11}=\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right)=1,g_{12}=0,g_{22}=1+u^2.$$

又 M^2 的法向量为

$$\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}=(\sin v,-\cos v,u).$$

单位法向量是

$$e_3=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin v,-\cos v,u).$$

又因为

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}=x_{uu}=(0,0,0),$$

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u}=x_{uv}=(-\sin v,\cos v,0)=\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v}=x_{vv}=(-u\cos v,-u\sin v,0).$$

所以第二基本量

$$L_{11}=\bar{g}\left(h\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right),e_3\right)=\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u},e_3\right)=0,$$

$$L_{12} = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u}, e_3 \right) = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = L_{21},$$

$$L_{22} = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v}, e_3 \right) = 0.$$

又

$$g^{11} = 1, g^{12} = g^{21} = 0, g^{22} = \frac{1}{1+u^2}.$$

所以中曲率

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij} L_{ij} = \frac{1}{2}\left[g^{11} L_{11} + 2g^{12} L_{12} + g^{22} L_{22} \right] = 0,$$

故正螺面 M^2 是 R^3 中的极小曲面.

同理可证:

悬链面 $M^2: x(u,v) = (\mathrm{ch}v\cos u, \mathrm{ch}v\sin u, v)$,即

$$z = \mathrm{arcch}\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \geqslant 1$$

是 R^3 中的极小曲面.

注 著名的 Bernstein 问题是:欧氏空间 R^{n+1} 中的极小图 M^n:

$$x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$$

是否一定为超平面,即 f 是一个线性函数?即

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

其答案为:当 $n \leqslant 7$ 时是肯定的($n = 2$,由 Bernstein 获得;$n = 3$,由 De Giorgi(1965) 获得;$n = 4$,由 Almgren(1966) 获得;$n = 5$,由 Simons(1968) 获得;$n \geqslant 8$ 时是否定的由 Bombieri, De Giorgi 和 Giusti(1969) 获得),因此,Bernstein 问题本身现在已经结束. 但 $n = 8$ 的反例只说是存在,并没有把 f 用非一次式具体地写出来. 于是目前剩下的问题是:

当 $n = 8$ 时非线性的 f 的具体地究竟是何种形状?而此极小曲面 M 有何几何性质?

有兴趣的读者可参考有关的文章.

另外,式(3.9.17)是一个二阶拟线性椭圆形偏微分方程,对于

它的解的确定，是一个非常复杂的分析问题. 为了得到 R^{n+1} 中极小超曲面的例子，从等变微分几何的观点，项武义教授开始了将上述 $P.D.E$ 归结为 $O.D.E$ 的研究，得到了许多漂亮的结果，同时他的方法适用于常平均曲率超曲面的情况，目前，这方面的研究仍很活跃.

3.10 球空间 $S^{n+p}(c)$ 中的极小子流形

设

$$S^{n+p}(c)=\{x=(x_1,\cdots,x_{n+p+1})\mid \bar{g}(x,x)=c^2\} \tag{3.10.1}$$

是 R^{n+p+1} 中以原点为中心，以 $c(c>0)$ 为半径的 $n+p$ 维球面，它是 R^{n+p+1} 中常截面曲率为 $\frac{1}{c^2}$ 的 Riemann 子流形，R^{n+p+1} 的 Riemann 度量为 $\bar{g}$，方程

$$\bar{g}(x,x)=c^2 \Leftrightarrow x_1^2+\cdots+x_{n+p+1}^2=c^2. \tag{3.10.2}$$

设 $x:M^n\to S^{n+p}(c)\subset R^{n+p+1}$ 是 $S^{n+p}(c)$ 中的 Riemann 浸入子流形，在 $S^{n+p}(c)$ 上选取标准正交标架场 $e_1,\cdots,e_{n+p}$，使 $e_1,\cdots,e_n$ 切于 M^n，设 $\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$ 是 $\{e_A\}$ 的对偶标架场，由于 $\bar{g}(x,x)=c^2$，外微分后可知，x 是 M^n 在 $S^{n+p}(c)$ 上的法标架场，也是 $S^{n+p}(c)$ 在 R^{n+p+1} 中的法标架场，所以取 $e_{n+p+1}=x$ 作为 $S^{n+p}(c)$ 在 R^{n+p+1} 中的单位法向量场，从而有

$$\bar{g}(x,e_A)=0,\bar{g}(e_A,e_B)=\delta_{AB}. \tag{3.10.3}$$

$S^{n+p}(c)$ 的运动方程为

$$\mathrm{d}x=\sum_{A=1}^{n+p}\omega_A e_A \tag{3.10.4}$$

$$\mathrm{d}e_A=\sum_{B=1}^{n+p}\omega_{AB}e_B-\frac{1}{c^2}\omega_A x \tag{3.10.5}$$

其中式(3.10.5)成立是因为：若设

$$\mathrm{d}e_A=\sum_B\omega_{AB}e_B+f_A x,$$

则从式(3.10.3)和式(3.10.2)得

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{g}(\mathrm{d}x, e_A) + \bar{g}(x, \mathrm{d}e_A) \\
&= \bar{g}(\sum_B \omega_B e_B, e_A) + \bar{g}(x, \sum_B \omega_{AB} e_B + f_A x) \\
&= \omega_A + c^2 f_A,
\end{aligned}
$$

故 $f_A = -\frac{1}{c^2}\omega_A$,所以式(3.10.5)成立。

而子流形 M^n 的运动方程为

$$\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e_i, \tag{3.10.6}$$

$$\mathrm{d}e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} e_j + \sum_{a=n+1}^{n+p} \omega_{ia} e_a - \frac{1}{c^2}\omega_i x \tag{3.10.7}$$

$i = 1,2,\cdots,n$.

定理 3.10.1 设 $N = S^{n+p}(c)$ 为 R^{n+p+1} 的嵌入子流形,$x: M^n \to S^{n+p}(c) \subset R^{n+p+1}$ 为 $S^{n+p}(c)$ 的等距浸入,$\bar{\nabla}$ 和 ∇^* 分别表示 $S^{n+p}(c)$ 和 R^{n+p+1} 上的 Riemann 联络,$\overline{H}$ 和 $\overline{H}^*$ 分别为 M^n 关于 $S^{n+p}(c)$ 和 R^{n+p+1} 的平均曲率向量场,则

$$\overline{H} = (\overline{H}^*)_N^T = (\frac{1}{n}\Delta x)_N^T \tag{3.10.8}$$

其中 $(\overline{H}^*)_N^T$ 表示 $\overline{H}^*$ 在 N 的切部上的投影.

证明:设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 M^n 上的局部标准正交切标架场,记

$$\nabla^*_{e_k} e_k = \underbrace{\Delta_1 + \overbrace{\Delta_2}^{}}_{N^T}\overbrace{+ \Delta_3}^{M^\perp} \tag{1.1}$$

因为

$$(\nabla^*_{e_k} e_k)_N^T = \bar{\nabla}_{e_k} e_k \triangleq \Delta_1 + \Delta_2, (\nabla^*_{e_k} e_k)_M^\perp \triangleq \Delta_2 + \Delta_3 \tag{1.2}$$

所以

$$((\nabla^*_{e_k} e_k)_N^T)_M^\perp = (\Delta_1 + \Delta_2)_M^\perp = \Delta_2 = (\Delta_2 + \Delta_3)_N^T = ((\nabla^*_{e_k} e_k)_M^\perp)_N^T.$$

又由式(3.9.3)得 $\Delta x = n\overline{H}^*$,所以

$$\overline{H} = \frac{1}{n}\sum_k (\overline{\nabla}_{e_k}e_k)^{\perp}_{M} = \frac{1}{n}\sum_k ((\nabla^*_{e_k}e_k)^T_N)^{\perp}_M$$
$$= \frac{1}{n}\sum_k ((\nabla^*_{e_k}e_k)^{\perp}_M)^T_N = (\overline{H}^*)^T_N = \left(\frac{1}{n}\Delta x\right)^T_N.$$

定理 3.10.2 (Takahashi)设 $x: M^n \to S^{n+p}(c) \subset R^{n+p+1}$ 是等距浸入,则 x($x(M^n)$ 或 M^n)是极小子流形

$$\Leftrightarrow \quad \Delta x = -\frac{n}{c^2}x, \text{即}$$

$$\Delta x_A = -\frac{n}{c^2}x_A, A = 1, \cdots, n+p+1. \qquad (3.10.9)$$

证法 1:设 a 是 R^{n+p+1} 中的一个固定向量,作 M^n 上的函数

$$f = \overline{g}(x, a) \qquad (2.1)$$

对式(2.1)外微分,并由式(3.10.6)得

$$\mathrm{d}f = \overline{g}(\mathrm{d}x, a) = \overline{g}(\sum_i \omega_i e_i, a) = \sum_i \overline{g}(e_i, a)\omega_i \triangleq \sum_i f_i\omega_i.$$

得

$$f_i = \overline{g}(e_i, a), i = 1, \cdots, n \qquad (2.2)$$

是 a 在 e_i 上的投影,也是 f 的共变导数,f_i 的共变导数为 f_{ij},再由式(3.10.7)及 f_{ij} 的定义我们得

$$\sum_j f_{ij}\omega_j = \mathrm{d}f_i + \sum_j f_j\omega_{ji} = \overline{g}(\mathrm{d}e_i, a) + \sum_j \overline{g}(e_j, a)\omega_{ji}$$
$$= \sum_j \overline{g}(\omega_{ij}e_j, a) + \sum_\alpha \overline{g}(\omega_{i\alpha}e_\alpha, a)$$
$$- \frac{1}{c^2}\overline{g}(\omega_i x, a) + \sum_j \overline{g}(e_j, a)\omega_{ji}$$
$$= \sum_j \sum_\alpha h^\alpha_{ij}\overline{g}(e_\alpha, a)\omega_j - \frac{1}{c^2}\sum_j \delta_{ij}\overline{g}(x, a)\omega_j,$$

所以

$$f_{ij} = \sum_\alpha h^\alpha_{ij}\overline{g}(e_\alpha, a) - \frac{1}{c^2}\delta_{ij}\overline{g}(x, a) \qquad (2.3)$$

故 $\Delta\overline{g}(x, a) = \Delta f = \sum_i f_{ii} = \sum_\alpha \sum_i h^\alpha_{ii}\overline{g}(e_\alpha, a) - \frac{n}{c^2}\overline{g}(x, a)$

$= \bar{g}(n\bar{H} - \frac{n}{c^2}x, a)$，又 $\Delta\bar{g}(x,a) = \bar{g}(\Delta x, a)$，所以

$$\Delta x = n\bar{H} - \frac{n}{c^2}x. \tag{2.4}$$

设 $\delta_1, \cdots, \delta_{n+p+1}$ 是 R^{n+p+1} 的固定标准正交标架，$x = (x_1, \cdots, x_{n+p+1})$ 是 M^n 的位置向量，则 $x = x_1\delta_1 + \cdots + x_{n+p+1} \cdot \delta_{n+p+1}$，得

$$x_A = \bar{g}(x, \delta_A), A = 1, \cdots, n+p+1 \tag{2.5}$$

由式(2.4)得，M^n 是 $S^{n+p}(c)$ 的极小子流形 $\Leftrightarrow \bar{H} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Delta x = -\frac{n}{c^2}x \tag{2.6}$$

又因为 $\Delta\bar{g}(x,a) = \bar{g}(n\bar{H} - \frac{n}{c^2}x, a)$，所以 $\bar{H} = 0 \Leftrightarrow$ 对任 $a = \delta_A$，有 $\Delta\bar{g}(x, \delta_A) = -\frac{n}{c^2}\bar{g}(x, \delta_A)$，即

$$\Delta x_A = -\frac{n}{c^2}x_A, A = 1, \cdots, n+p+1 \tag{2.7}$$

特别 $c = 1$ 时，$\Delta x_A = -nx_A$，这是判断 $S^{n+p}(1)$ 中极小子流形的充要条件．

证法 2：设 x 是 M^n 的位置向量，令

$$\mathrm{d}x = \sum_i x_i\omega_i \tag{2.8}$$

与式(3.10.6)比较得

$$x_i = e_i \tag{2.9}$$

利用式(3.10.7)，x_i 的共变导数 x_{ij} 如下

$$\begin{aligned}\sum_j x_{ij}\omega_j &= Dx_i = \mathrm{d}x_i + \sum_j x_j\omega_{ji} = \mathrm{d}e_i + \sum_j e_j\omega_{ji} \\ &= \sum_\alpha \omega_{i\alpha}e_\alpha - \frac{1}{c^2}\omega_i x \\ &= \sum_\alpha\sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j e_\alpha - \frac{1}{c^2}\sum_j \delta_{ij}\omega_j x,\end{aligned}$$

所以

$$x_{ij} = \sum_\alpha h_{ij}^\alpha e_\alpha - \frac{1}{c^2}\delta_{ij}x. \tag{2.10}$$

故 $\Delta x = \sum_i x_{ii} = \sum_\alpha \sum_i h_{ii}^\alpha e_\alpha - \frac{n}{c^2}x = n\overline{H} - \frac{n}{c^2}x$，所以 M^n 极小$\Leftrightarrow \overline{H}=0$ $\Leftrightarrow \Delta x = -\frac{n}{c^2}x$.

证法 3：由式(3.10.8)，M^n 是 $S^{n+p}(c)$ 的极小子流形

$$\Leftrightarrow \overline{H}=0 \Leftrightarrow (\Delta x)_N^T = 0 \tag{2.11}$$

即 Δx 在 $N=S^{n+p}(c)$ 上的切部为零，所以 Δx 是 $S^{n+p}(c)$ 上的法向量场，而 x 也是它的法向量场，所以 $\Delta x /\!/ x$，即

$$\Delta x = \lambda x \tag{2.12}$$

其中 $\lambda \in C^\infty(M;R)$，现确定 λ：

因为 $x(M)$ 是 $S^{n+p}(c)$ 的一部分，所以 $|x|^2 = \bar{g}(x,x) = c^2$，又因为

$$x = (x_1, \cdots, x_{n+p+1}), \Delta x \mathrm{e_x x} \triangleq (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n+p+1}),$$

$$\mathrm{grad}x \triangleq (\mathrm{grad}x_1, \cdots, \mathrm{grad}x_{n+p+1}),$$

$$e_x x \triangleq (e_i x_1, \cdots, e_i \mathrm{x}_{n+p+1}), \mathrm{grad}x_A = \sum_i e_i(x_A)e_i.$$

因为 x 是等距浸入，所以

$$\bar{g}(e_i x, e_i x) = \bar{g}(x_*(e_i), x_*(e_i)) = g(e_i, e_i) = 1, \tag{2.13}$$

而 x_A 是 M^n 上的坐标函数，所以

$$\frac{1}{2}\Delta x_A^2 = x_A \Delta x_A + |\mathrm{grad}x_A|^2, \tag{2.14}$$

$A = 1, \cdots, n+p+1$. 从而我们得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\Delta(c^2) = \frac{1}{2}\Delta\bar{g}(x,x) = \frac{1}{2}\Delta(\sum_A x_A^2) \\ &= \sum_A x_A \Delta x_A + \sum_A |\mathrm{grad}x_A|^2 \\ &= \bar{g}(x, \Delta x) + \sum_A g(\sum_i e_i(x_A)e_i, \sum_j e_j(x_A)e_j) \\ &= \bar{g}(x, \lambda x) + \sum_i \sum_A [e_i(x_A)]^2 \end{aligned}$$

$$= \lambda \bar{g}(x, x) + \sum_i g(e_i x, e_i x)$$

$$= \lambda c^2 + n,$$

故 $\lambda = -\frac{n}{c^2}$,所以 $\Delta x = -\frac{n}{c^2}x$.

注 $|Dx|^2 \triangleq |\text{grad}x|^2 = \sum_A |\text{grad}x_A|^2$.

进一步,我们有如下结果:

定理 3.10.3 等距浸入 $x: M^n \to R^{n+p+1}$满足 $\Delta x = -\lambda x$(其中 λ 是正常数)的充要条件是:浸入 $x: M^n \to S^{n+p}\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\right)$是极小浸入.

证明:"$\Leftarrow$"由定理 3.10.2 得证,

"$\Rightarrow$"设$\overline{H}^*$是 M^n 在 R^{n+p+1}中的平均曲率向量,由题设和式(3.9.3)得 $\Delta x = -\lambda x = n\overline{H}^*$,所以

$$x = -\frac{n}{\lambda}\overline{H}^* \tag{3.1}$$

因此,对 M^n 上任何光滑切向量场X,有

$$X\bar{g}(x, x) = 2\bar{g}(X(x), x) = 2\bar{g}(x_*(X), x)$$

$$= 2\bar{g}\left(X, -\frac{n}{\lambda}\overline{H}^*\right) = 0, \tag{3.2}$$

由式(3.2)得到

$$\bar{g}(x, x) = c^2, \text{即 } x(M) \subset S^{n+p}(c), \tag{3.3}$$

又由 x 为浸入知,上面的常数 $c>0$. 由于 x 为等距浸入,故对 M^n 上的正交标架场 $e_1, \cdots, e_n$,有

$$\bar{g}(x_*(e_i), x_*(e_i)) = g(e_i, e_j) = 1 \tag{3.4}$$

从而

$$0 = \frac{1}{2}\Delta(c^2) = \frac{1}{2}\Delta(|x|^2) = \bar{g}(x, \Delta x) + |Dx|^2$$

$$= \bar{g}(x, -\lambda x) + \sum_i g(x_*(e_i), x_*(e_i))$$

$$= -\lambda c^2 + n, \tag{3.5}$$

所以 $C=\sqrt{\frac{n}{\lambda}}$,故 $x: M^n \to S^{n+p}\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\right)$,由 $\bar{g}(x,x)=\frac{n}{\lambda}$知,$x$ 是 $S^{n+p}(c)\triangleq N$ 的一个法向量场,又 $\Delta x=-\lambda x$,所以 Δx 也是它的一个法向量场,故 Δx 在 N 上的切部为零,即

$$(\Delta x)_N^T=0 \tag{3.6}$$

由式(3.10.8)和式(3.6)知

$$\bar{H}=\left(\frac{1}{n}\Delta x\right)_N^T=0 \tag{3.7}$$

所以 M^n 是 $S^{n+p}\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\right)$的极小子流形 .

在定理 3.10.2 中,当 $c=1$ 时,等距浸入 $x: M^n \to S^{n+p}(1)$,是极小浸入 $\Leftrightarrow \Delta x_A=-nx_A, A=1,\cdots,n+p+1$.

注 从分析的角度来看,要想寻找 $S^{n+p}(1)$中的 n 维极小子流形,只要去求那些特征值为 $-n$ 的特征函数,下面的几个例子将说明这一事实,但实际上,要寻找这样的特征函数,牵涉到流形的拓扑性质,故绝非易事.

例 1 设 $S^2(\sqrt{3})=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=3\}$,定义映射 $x: S^2(\sqrt{3})\to S^4(1)$如下

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x_2x_3, y_2=\frac{1}{\sqrt{3}}x_3x_1, y_3=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_2,$$

$$y_4=\frac{1}{2\sqrt{3}}(x_1^2-x_2^2), y_4=\frac{1}{6}(x_1^2+x_2^2-2x_3^2), \tag{1.1}$$

则 $S^2(\sqrt{3})$是 $S^4(1)$的极小子流形,称为 Veroness 曲面.

证明:因为

$$\begin{aligned}&y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2\\&=\frac{1}{3}x_2^2x_3^2+\frac{1}{3}x_3^2x_1^2+\frac{1}{3}x_1^2x_2^2+\frac{1}{12}(x_1^2-x_2^2)^2\\&\quad+\frac{1}{36}(x_1^2+x_2^2-2x_3^2)^2\\&=\frac{1}{9}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2=1,\end{aligned} \tag{1.2}$$

所以 $x(S^2(\sqrt{3}))\subset S^4(1)$，又易算得

$$d\bar{s}^2=\sum_{i=1}^{5}(dy_i)^2=\sum_{j=1}^{3}(dx_j)^2=ds^2 \tag{1.3}$$

所以 x 是 $S^2(\sqrt{3})$ 到 $S^4(1)$ 的等距浸入，由于 (x_1,x_2,x_3) 与 $(-x_1,-x_2,-x_3)$ 的像在 $S^4(1)$ 中是同一点，因此这个映射确定了实射影空间 RP^2 到 $S^4(1)$ 的一个嵌入，将 $S^2(\sqrt{3})$ 的方程写为参数方程：

$$x_1=\sqrt{3}\sin u\cos v,\ x_2=\sqrt{3}\sin u\sin v,\ x_3=\sqrt{3}\cos u, \tag{1.4}$$

其中 $0<u<\pi, 0\leqslant v<2\pi$，于是

$$ds^2=\sum_{i=1}^{3}(dx_i)^2=3du^2+3\sin^2 u\,dv^2, \tag{1.5}$$

所以第一基本量

$$g_{11}=3,\ g_{12}=g_{21}=0,\ g_{22}=3\sin^2 u \tag{1.6}$$

由此得

$$\det(g_{ij})=9\sin^2 u,\ g^{11}=\frac{1}{3},\ g^{12}=g^{21}=0,\ g^{22}=\frac{1}{3\sin^2 u} \tag{1.7}$$

由式(1.1)和式(1.4)得

$$y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2u\sin v \tag{1.8}$$

由式(2.5.6)得

$$\begin{aligned}\Delta y_1&=\frac{1}{3\sin u}\frac{\partial}{\partial u}\left[3\sin u\cdot\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2u\sin v\right)\right]\\&\quad+\frac{1}{3\sin u}\frac{\partial}{\partial v}\left[3\sin u\cdot\frac{1}{3\sin^2 u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2u\sin v\right)\right]\\&=\frac{\sqrt{3}\sin v}{3\sin u}[\cos u\cos 2u-2\sin u\cdot\sin 2u]-\frac{\sqrt{3}\cos u\sin v}{3\sin u}\\&=-\sqrt{3}\sin 2u\sin v=-2y_1,\end{aligned} \tag{1.9}$$

同理可得

$$\Delta y_A = -2y_A, A = 2,3,4,5, \tag{1.10}$$

由定理 3.10.2 知，$S^2(\sqrt{3})$是 $S^4(1)$中的极小子流形．

注 $S^2(\sqrt{3})$中的$\sqrt{3}$为球面的半径，其截曲率 $K=\frac{1}{3}$．

例 2 记 $R^{n+2}=R^{r+1}\oplus R^{s+1}$，这里 $r+s=n$，$\oplus$表示直和．记 $T^n=S^r(a)\times S^s(b)$，其中 $S^r(a)$和 $S^s(b)$分别是半径的 a 和 b 的 R^{r+1}及 R^{s+1}中的球面．试确定常数 a,b，使得

(1) $T^n \to S^{n+1}(1) \subset R^{n+2}$是等距浸入，

(2) T^n 是 $S^{n+1}(1)$中的极小超曲面．

解：设 $x=x_1+x_2$ 是 R^{n+2}中的位置向量，其中 $x_1\in R^{r+1}$，$x_2\in R^{s+1}$，或把 x_1,x_2 看成 R^{n+2}中的向量，则

$$x_1=(x_1,\cdots,x_{r+1},\underbrace{0,\cdots,0}_{s+1\text{个}})\in R^{n+2},$$

$$x_2=(\underbrace{0,\cdots,0}_{r+1\text{个}},x_{r+2},\cdots,x_{n+2})\in R^{n+2}.$$

若 $x\in T^n$，则 $x=ax_1+bx_2$，且

$$\bar{g}_1(x_1,x_1)=1, \bar{g}_2(x_2,x_2)=1, \tag{2.1}$$

其中 $\bar{g}_1$ 和 $\bar{g}_2$ 分别是 R^{r+1}和 R^{s+1}中的度量，由式(2.1)得

$$\bar{g}_1(\mathrm{d}x_1,x_1)=0, \bar{g}_2(\mathrm{d}x_2,x_2)=0. \tag{2.2}$$

现在在 R^{n+2}中定义内积如下：

$$\bar{g}(x_1+x_2,y_1+y_2)\overset{\Delta}{=}\bar{g}_1(x_1,y_1)+\bar{g}_2(x_2,y_2) \tag{2.3}$$

要(1)满足，由式(2.3)及式(2.1)得

$$a^2+b^2=1 \tag{2.4}$$

在 $x=ax_1+bx_2$ 处，考察向量

$$e_{n+1}=-bx_1+ax_2, \tag{2.5}$$

由于

$\bar{g}(\mathrm{d}x_1,-bx_1+ax_2)=-b\bar{g}_1(\mathrm{d}x_1,x_1)+a\bar{g}_2(0,x_2)=0$,

$\bar{g}(\mathrm{d}x_2,-bx_1+ax_2)=0, \bar{g}(e_{n+1},e_{n+1})=b^2+a^2=1$.

可知 e_{n+1}是 T^n 在 $S^{n+1}(1)$中的单位法向量，于是 T^n 的第一、第二基本形式分别是

$$\mathrm{I} = \bar{g}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}x) = a^2\bar{g}_1(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_1) + b^2\bar{g}_2(\mathrm{d}x_2,\mathrm{d}x_2) \tag{2.6}$$

和

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &= -\bar{g}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}e_{n+1}) = -\bar{g}(a\mathrm{d}x_1 + b\mathrm{d}x_2, -b\mathrm{d}x_1 + a\mathrm{d}x_2)\\ &= \frac{b}{a}[a^2\bar{g}_1(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_1)] - \frac{a}{b}[b^2\bar{g}_2(\mathrm{d}x_2,\mathrm{d}x_2)],\end{aligned} \tag{2.7}$$

从而 T^n 的 n 个主曲率是

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \frac{b}{a}, \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = -\frac{a}{b}, \tag{2.8}$$

要使 T^n 在 $S^{n+1}(1)$ 中是极小的，必须有 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$，即

$$r \cdot \frac{b}{a} - s \cdot \frac{a}{b} = 0, s = n - r, \tag{2.9}$$

从式(2.4)及式(2.9)解出 a, b 得

$$a = \sqrt{\frac{r}{n}}, b = \sqrt{\frac{n-r}{n}}, \tag{2.10}$$

此时 $x = \sqrt{\frac{r}{n}}x_1 + \sqrt{\frac{n-r}{n}}x_2$，并且

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \sqrt{\frac{n-r}{r}}, \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = -\sqrt{\frac{r}{n-r}} \tag{2.11}$$

$$H_{n+1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{n-r}{r}}\,\mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{r}{n-r}}\,\mathrm{I}_{n-r} \end{bmatrix}.$$

T^n 的第二基本形式模长的平方 σ 为

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = r\left(\sqrt{\frac{n-r}{r}}\right)^2 + (n-r)\left[-\sqrt{\frac{r}{n-r}}\right]^2\\ &= n - r + r = n,\end{aligned} \tag{2.12}$$

因此 $T^n = S^r\left(\sqrt{\frac{r}{n}}\right) \times S^{n-r}\left(\sqrt{\frac{n-r}{n}}\right)$ 是 $S^{n+1}(1)$ 中的极小超曲面($r = 1;2,\cdots,n-1$). T^n 称为 Clifford 极小超曲面．特别 $n = 2$ 时，$T^2 = S^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times S^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ 称为 $S^3(1)$ 中的 Clifford 环面，可

证其截面曲率 $K=0$.

注 由式(2.12)知,T^n 不是全测地子流形,又因为 $r=n(n-1)-\sigma$,所以式(2.12)$\sigma=n \Leftrightarrow r=n(n-2)$.

注 Clifford 极小超曲面 T^n 具有以下性质:

(1) T^n 的两个主曲率均为常数.

(2) T^n 的数量曲率 $r=n(n-2)$是常数.

(3) 可证,T^n 的截面曲率 $K \geqslant 0$.

十分有意义的问题是:

1) $S^{n+1}(1)$中具有两个不同的常主曲率超曲面是否必是 $T^n=S^r(a)\times S^{n-r}(b)$的形式?这一问题,由 Cartan 在 1938 年研究 $S^{n+1}(1)$中等参超曲面时,给出了肯定的回答.

2) $S^{n+1}(1)$中具有常的数量曲率 r 的超曲面 M^n 的分类怎样?这一问题目前还未解决,仅在 M^n 是旋转超曲面时,得到了一些结果(可参看 M. L. Leite 的文章《Rotational hypersurface of space form with constant scalar curvature》, Manuscripta Math. 67, (1990):285~304).

3) 对于 $S^{n+1}(1)$中具有非负截面曲率 K 的超曲面的分类问题更加困难且没有得到解决.

例 3 设 $S^n(1)$是 $S^{n+p}(1)$中的 n 维大球,即 $S^n(1)=R^{n+1}\cap S^{n+p}(1)$,则 $S^n(1)$是 $S^{n+p}(1)$中的全测地子流形,从而是极小子流形。

证明:由 $S^{n+p}(1)$的运动方程式(3.10.5)得

$$de_\alpha=\sum_i \omega_{\alpha i}e_i+\sum_\beta \omega_{\alpha\beta}e_\beta-\omega_\alpha x, \tag{3.1}$$

所以

$$\omega_{\alpha i}=\bar{g}(de_\alpha, e_i). \tag{3.2}$$

由于 $S^n(1)=R^{n+1}\cap S^{n+p}(1)$,在 $S^n(1)$上取法标架场 $e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$,使得 $e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$是 R^{n+p+1}中的固定向量,于是

$$de_\alpha=0. \tag{3.3}$$

由式(3.2)和式(3.3)得

$$\omega_{\alpha i} = -\sum_j h_{ij}^{\alpha}\omega_j = 0 \tag{3.4}$$

所以 $h_{ij}^{\alpha}=0, \forall\, i,j,\alpha$ 故 $S^n(1)$是 $S^{n+p}(1)$的全测地子流形.

类似于例 2,可以构造 $S^{n+p}(1)$中的极小子流形 M^n 如下:

定理 3.10.4 设 $M^n = S^{m_1}\left(\sqrt{\frac{m_1}{n}}\right)\times\cdots\times S^{m_k}\left(\sqrt{\frac{m_k}{n}}\right)$是 $S^{n+k-1}(1)$中的极小子流形,则

(1) $\frac{m_k}{n}=\frac{1}{k}, m_k=\frac{n}{k}$,

(2) $\sigma = n(k-1) = np, p = k-1$.

证明:设浸入为

$$x = \sqrt{\frac{m_1}{n}}x_1 + \cdots + \sqrt{\frac{m_k}{n}}x_k, \tag{1}$$

则

$$\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{m_1}{n}}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \sqrt{\frac{m_k}{n}}\mathrm{d}x_k, \tag{2}$$

设

$$\bar{g}_i(x_i, x_i) = 1, i = 1,\cdots,k, \tag{3}$$

则

$$\bar{g}_i(\mathrm{d}x_i, x_i) = 0, i = 1,\cdots,k. \tag{4}$$

再设

$$e_{n+1} = \sqrt{\frac{m_1}{n}}x_1 + \cdots + \sqrt{\frac{m_{k-1}}{n}}x_{k-1} - \frac{\frac{m_1}{n}+\cdots+\frac{m_{k-1}}{n}}{\sqrt{\frac{m_k}{n}}}x_k, \tag{5}$$

则

$$\bar{g}(x, e_{n+1}) = \frac{m_1}{n} + \cdots + \frac{m_{k-1}}{n} - \frac{m_1+\cdots+m_{k-1}}{n} = 0 \tag{6}$$

其中 $\bar{g}$ 是R^{n+k}中的内积,所以 e_{n+1}是 M^n 上的法向量,M^n 的第一、第二基本形式分别为

$$\mathrm{I} = \bar{g}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}x) = \frac{m_1}{n}\bar{g}_1(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1) + \cdots + \frac{m_k}{n}\bar{g}(\mathrm{d}x_k, \mathrm{d}x_k) \tag{7}$$

和

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= -\bar{g}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}e_{n+1}) \\
&= -\frac{m_1}{n}\bar{g}_1(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1) - \cdots - \frac{m_{k-1}}{n}\bar{g}_{k-1}(\mathrm{d}x_{k-1}, \mathrm{d}x_{k-1}) \\
&\quad + \left(\frac{m_1}{n} + \cdots + \frac{m_{k-1}}{n}\right)\bar{g}_k(\mathrm{d}x_k, \mathrm{d}x_k) \\
&= -\left[\frac{m_1}{n}\bar{g}_1(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1)\right] - \cdots - \left[\frac{m_{k-1}}{n}\bar{g}_{k-1}(\mathrm{d}x_{k-1}, \mathrm{d}x_{k-1})\right] \\
&\quad + \frac{m_1 + \cdots + m_{k-1}}{m_k}\left[\frac{m_k}{n}\bar{g}_k(\mathrm{d}x_k, \mathrm{d}x_k)\right],
\end{aligned} \tag{8}
$$

所以特征值为

$$
\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = -1, \lambda_k = \frac{m_1 + \cdots + m_{k-1}}{m_k} = \frac{n - m_k}{m_k}. \tag{9}
$$

因为 M^n 极小,所以 $nH = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$,即

$$
-(k-1) + \frac{n - m_k}{m_k} = 0, \tag{10}
$$

得

$$
\frac{m_k}{n} = \frac{1}{k}, m_k = \frac{n}{k}. \tag{11}
$$

由式(9)和式(11)得

$$
\begin{aligned}
\sigma &= m_1\lambda_1^2 + \cdots + m_{k-1}\lambda_{k-1}^2 + m_k\lambda_k^2 \\
&= m_1 + \cdots + m_{k-1} + m_k \cdot \left(\frac{n - m_k}{m_k}\right)^2 \\
&= (n - m_k) + \frac{(n - m_k)^2}{m_k} = n(k-1),
\end{aligned} \tag{12}
$$

其中余维数 $p = k - 1$,所以 $\sigma = np$.

注 定理 3.10.4 表明 $S^n(1) \times S^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \cdots \times S^{\frac{n}{k}}\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)$ 是 $S^{n+k-1}(1)$ 中的极小子流形,并且 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = 1$, $\lambda_k = k - 1, \sigma = n(k-1), k = 2, 3, \cdots$ 如

(1) $S^n(1)\times S^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$是 $S^{n+1}(1)$的极小子流形，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=1,\sigma=n$.

(2) $S^n(1)\times S^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\times S^{\frac{n}{3}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$是 $S^{n+2}(1)$的极小子流形，$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2,\sigma=2n$.

……

定理 3.10.5 设 $N^{n+p}(c)$是常曲率为 c 的 $n+p$ 维 Riemann 流形，若 M^n 是$N^{n+p}(c)$的极小子流形，则

$$R_{ii}\leqslant(n-1)c,\ i=1,2,\cdots,n, \tag{3.10.10}$$

等式成立：$R_{ii}=(n-1)c \Leftrightarrow M^n$ 是$N^{n+p}(c)$的全测地子流形 .

证明：由式(3.7.1)和式(3.5.11)得

$$\begin{aligned}
R_{ii} &= \sum_{j\neq i}R_{ijij}\\
&=(n-1)c+\sum_\alpha\left[h_{ii}^\alpha\sum_{j\neq i}h_{jj}^\alpha-\sum_{j\neq i}(h_{ij}^\alpha)^2\right]\\
&=(n-1)c+\sum_\alpha h_{ii}^\alpha\left(\sum_j h_{jj}^\alpha-h_{ii}^\alpha\right)-\sum_\alpha\sum_{j\neq i}(h_{ij}^\alpha)^2\\
&=(n-1)c-\sum_\alpha(h_{ii}^\alpha)^2-\sum_\alpha\sum_{j\neq i}(h_{ij}^\alpha)^2\\
&=(n-1)c-\sum_\alpha\sum_j(h_{ij}^\alpha)^2\leqslant(n-1)c.
\end{aligned}$$

$R_{ii}=(n-1)c\Leftrightarrow\sum_\alpha\sum_j(h_{ij}^\alpha)^2=0\Leftrightarrow h_{ij}^\alpha=0$，即 M^n 是全测地子流形 .

定理 3.10.6 设 $M^n(c_1)$是 $N^{n+p}(c_2)$中的极小子流形，则

$$c_1\leqslant c_2, \tag{3.10.11}$$

等式成立：$c_1=c_2 \Leftrightarrow M^n(c_1)$是全测地子流形 .

证明：对任 i，因为

$$c_1=R_{ijij}=c_2+\sum_\alpha\left[h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha-(h_{ij}^\alpha)^2\right],$$

所以

$$(n-1)c_1=\sum_{j\neq i}R_{ijij}=(n-1)c_2-\sum_\alpha\sum_j(h_{ij}^\alpha)^2\leqslant(n-1)c_2.$$

故 $c_1 \leqslant c_2$,并且 $c_1 = c_2 \Leftrightarrow$ 任 i,有 $\sum\limits_{\alpha} \sum\limits_{j} (h_{ij}^{\alpha})^2 = 0 \Leftrightarrow h_{ij}^{\alpha} = 0$,所以 M^n 是全测地子流形.

3.11 球面上极小子流形的内在刚性

设 $S^{n+p}(a)$ 是以原点为中心以 a 为半径的球面,我们知 $S^{n+p}(a)$ 的截面曲率 $R_{ijij} = \dfrac{1}{a^2}$ 是正常数,当 $a = 1$ 时,$S^{n+p}(1)$ 的截面曲率就是半径 1,设 M^n 是 $S^{n+p}(1)$ 中的极小子流形,由式(3.7.2)得

$$r = n(n-1) - \sigma, \tag{3.11.1}$$

由于数量曲率 r 是 M^n 的内在量,由式(3.11.1)可知,对 $S^{n+p}(1)$中的极小子流形 M^n 的第二基本形式 Ⅱ 来说,其模长的平方 σ 也是内在量.

以下讨论内在刚性(内蕴刚性),所谓内在刚性,就是对子流形 M^n 的内在量:数量曲率 r,Ricci 曲率 R_{ii}和截面曲率 R_{ijij}加以某种限制,从而得到子流形的某些性质.

注 内蕴刚性也叫子流形的 Pinching(夹击)问题.

1. 关于 J.Simons 公式

自从 J.Simons 于 1968 年给出下面的积分公式以来,有关夹击问题,几何学家研究得很多,为此先介绍这个积分公式.

设 M^n 是空间形式 $N^{n+p}(c)$ 中的极小子流形,则 $\mathrm{tr}H\alpha = \sum\limits_{i} h_{ii}^{\alpha} = 0, \alpha = n+1, \cdots, n+p$,从而 $\sum\limits_{k} h_{kkij}^{\alpha} = 0$,由(3.3.27)式,对一切实数 a,有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\sigma &= \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} (h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha} \sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} (h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} (h_{mk}^{\alpha} R_{mijk} + h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk})\end{aligned}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{ki}^{\beta}R_{\beta\alpha jk}^{\perp}$$

$$=\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2-anc\sigma+(1+a)$$

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})$$

$$-(1-a)\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]+a\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2$$

$$(3.11.2)$$

当 $p=1$ 时,对于 $N^{n+1}(c)$ 中的超曲面 M^n,因 $R_{n+1n+1jk}^{\perp}=0$,所以有

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma=\frac{1}{2}\Delta(\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1})^2)=\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2+\sum_{i,j}h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1}$$

$$=\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2+\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{n+1}(h_{mk}^{n+1}R_{mijk}+h_{mi}^{n+1}R_{mkjk})$$

$$=\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2+nc\sigma-\sigma^2. \qquad (3.11.3)$$

由于 $A_{\alpha\beta}=(\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta))$ 是 p 阶对称方阵,故可选取法标架场 $e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$ 使其对角化,即

$$\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)=\mathrm{tr}H_\alpha^2\cdot\delta_{\alpha\beta}. \qquad (3.11.4)$$

定理 3.11.1 (J. Simons, 1968 年)设 M^n 是单位球面 $S^{n+p}(1)$中的紧致极小子流形,则下积分公式成立:

$$\int_M\sigma[(2-\frac{1}{p})\sigma-n]\mathrm{d}v\geqslant 0 \qquad (3.11.5)$$

其中 $\mathrm{d}v$ 是M^n 的体积元素,式(3.11.5)叫 J. Simons 积分公式 .

证明:在式(3.11.2)中取 $a=-1$,并由式(3.11.4)及定理 3.3.1 的(1)和(2)得

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma=\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2+n\sigma-2\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]$$

$$-\sum_{\alpha}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2$$

$$\geqslant n\sigma-2[\sigma^2-\sum_{\alpha}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2]-\sum_{\alpha}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2$$

$$= n\sigma - 2\sigma^2 + \sum_\alpha (\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2$$

$$\geqslant n\sigma - 2\sigma^2 + \frac{1}{p}\sigma^2$$

$$= \sigma\left[n - \left(2 - \frac{1}{p}\right)\sigma\right] \tag{3.11.6}$$

因为 M^n 紧致,从而得$\int_M \sigma\left[n - \left(2 - \frac{1}{p}\right)\sigma\right]\mathrm{d}v \leqslant \frac{1}{2}\int_M \Delta\sigma \mathrm{d}v = 0.$

2. 关于数量曲率的夹击

J.Simons(1968)应用了积分公式(3.11.5)证明了 $S^{n+p}(1)$ 中极小子流形的类中,全测地子流形是孤立的,进而在 1970 年,Chern-Docarmo-Kobayashi 决定了离全测地子流形"最近的"极小子流形,即

定理 3.11.2 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$紧致极小,若

$$\sigma \leqslant \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}, \tag{3.11.7}$$

则或者 M^n 是全测地子流形,即 $M^n = S^n(1)$,或者 $\sigma = \dfrac{n}{2 - \frac{1}{p}}$,此时 M^n 是 Clifford 极小超曲面 $S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times S^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$,或者 M^n 是$S^4(1)$中的 Veroness 曲面 $S^2(\sqrt{3})$.

证明:由式(3.11.5)或式(3.11.6)得 σ 是下调和函数,所以 $\Delta\sigma = 0$,得

$$\sigma\left[n - \left(2 - \frac{1}{p}\right)\sigma\right] = 0 \tag{3.11.8}$$

当 $\sigma < \dfrac{n}{2 - \frac{1}{p}}$时,$\sigma = 0$,所以 $M^n = S^n(1)$是全测地子流形;当 $\sigma \neq 0$

时，$\sigma=\dfrac{n}{2-\dfrac{1}{p}}$，这时式(3.11.6)及定理3.3.1中的式(1)和式(2)均为等式，通过一个较为繁杂的代数运算可得

(1) $p=1$，这时 $\sigma=n$，矩阵 H_{n+1} 为 .

$$H_{n+1}=\begin{bmatrix}\sqrt{\dfrac{n-k}{k}}I_k & 0\\ 0 & -\sqrt{\dfrac{k}{n-k}}I_{n-k}\end{bmatrix}.$$

其中 I_k 表示 k 阶单位矩阵，这时 $M^n=S^k\left(\sqrt{\dfrac{k}{n}}\right)\times S^{n-k}\left(\sqrt{\dfrac{n-k}{n}}\right)$是 $S^{n+1}(1)$中的 Clifford 极小超曲面 .

(2) $p=2, n=2$，这时 $\sigma=\dfrac{4}{3}$，矩阵 H_3, H_4 为

$$H_3=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}, H_4=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{bmatrix},$$

这时 $M^n=S^2(\sqrt{3})$是 $S^4(1)$中的 Veroness 曲面.

注1 由式(3.11.1)，条件式(3.11.7)等价于

$$r\geqslant n(n-1)-\frac{n}{2-\dfrac{1}{p}}=n\left(n-\frac{3p-1}{2p-1}\right), \qquad (3.11.9)$$

M^n 是全测地子流形：$\sigma=0 \Leftrightarrow r=n(n-1)$；$M^n$ 是 Clifford 极小超曲面时，$p=1, \sigma=n \Leftrightarrow r=n(n-2)$.

注2 在定理3.11.2中，以"$r=$常数"代替"紧致"结论仍成立.

对于 $p=1$，由式(3.11.3)易证下面定理成立.

定理 3.11.3 设 $M^n\to S^{n+1}(1)$紧致极小，若

$$\sigma\leqslant n \quad (\text{即 } r\geqslant n(n-2)). \qquad (3.11.10)$$

则 M^n 或者是全测地子流形，或者是 Clifford 极小曲面 .

注 定理 3.11.3 是定理 3.11.2 的特殊情形，将式(3.11.10)的条件改为 $r=n(n-2)$，则 M^n 是 Clifford 极小曲面 .

一个有趣的问题是研究 $S^{n+1}(1)$中具有常的数量曲率 r 的紧致极小超曲面，这一问题首先由 Chern-Docarmo-Kobayshi 提出，他们问：接着 $r=n(n-2)$后面的一个值有没有？若有，它是什么？关于这一所谓第二空隙问题，首先由彭家贵和藤楚莲两教授突破，他们通过计算第二基本形式的共变导数的拉普拉斯和第二基本形式高阶迹函数的拉普拉斯，获得如下定理：

定理 3.11.4 设 $M^n \to S^{n+1}(1)$紧致极小，数量曲率 $r=$常数，如果 $\sigma>n$(即 $r<n(n-2)$)，则 $\sigma>n+\frac{1}{12n}$(即 $r<n(n-2)-\frac{1}{12n}$).

对于 $n=3$，他们获得更尖锐的结果：

定理 3.11.5 设 $M^3 \to S^4(1)$紧致极小，数量曲率 $r=$常数，如果 $r<9$，则 $r\leqslant 0$.

基于以上两个定理，他们提出以下三个问题：

(1) 对于 $S^{n+1}(1)$中的极小超曲面，是否存在一个仅依赖于 n 的常数$\beta(n)$，使得 $\sigma\leqslant\beta(n)$?

(2) $S^{n+1}(1)$中是否存在具有负的常数量曲率 r 的紧致极小超曲面？

(3) $S^{n+1}(1)$中是否存在具有非正(不恒为零)数量曲率 r 的紧致极小超曲面？

关于定理 3.11.2 中的 J. Simons 的 Pinching 常数$\frac{n}{2-\frac{1}{p}}$，沈一兵教授在中国科学 A(1)，1989 年给出了只与 n 有关的 Pinching 常数，得到如下定理：

定理 3.11.6 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$紧致极小，若

$$\sigma\leqslant\frac{n}{1+\sqrt{\frac{n+1}{2n}}}, \tag{3.11.11}$$

则 M^n 或者是全测地子流形，或者是 $S^4(1)$中的 Veroness 曲面．

注 由式(3.11.1)，条件式(3.11.11)等价于

$$r \geqslant \frac{n}{n+1}\left[n(n-2)-1+\sqrt{2n(n-1)}\right], \quad (3.11.12)$$

当 $n=2$ 且 $p \geqslant 2$ 或 $n \leqslant 9$ 且 $p \geqslant 3$ 或 $p \geqslant 4$ 时，有

$$\frac{n}{2-\frac{1}{p}} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt{\frac{n+1}{2n}}}.$$

徐森林教授在《微分几何》(中国科学技术大学出版社，1997年)对此作了更进一步的改进，得到

定理 3.11.7 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$紧致极小，若

$$\sigma \leqslant \frac{3n+2}{5n+2}n, \quad (3.11.13)$$

则或者 M^n 是全测地子流形，或者 $n=2$，M^2 是 $S^4(1)$中的 Veroness 曲面．

注 $\dfrac{n}{2-\frac{1}{p}} < \dfrac{n(3n+2)}{5n+2}$，并且$\dfrac{n}{1+\sqrt{\frac{n+1}{2n}}} < \dfrac{n(3n+2)}{5n+2}$.

定理 3.11.8 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$紧致极小，并且

$$R^{\perp}=0,\ r \geqslant n(n-2), \quad (3.11.14)$$

则 $p=1$，或者 M^n 是 $S^{n+1}(1)$中的 Clifford 极小超曲面，或者 M^n 是 $S^{n+1}(1)$中的全测地超曲面．

证明：由于 M^n 的法丛平坦，即 $R^{\perp}=0$，所以式(3.5.26)成立，在式(3.11.2)中取 $a=-1$，再由定理 3.3.1 的(1)我们得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\sigma &= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + n\sigma - \sum_{\alpha}(\mathrm{tr}H_{\alpha}^2)^2 \\ &\geqslant n\sigma - \sigma^2 = \sigma(n-\sigma). \quad (3.11.15)\end{aligned}$$

由式(3.11.1)知，$r \geqslant n(n-2) \Leftrightarrow \sigma \leqslant n$，从而得 $p=1$，或者 $\sigma=0$，或者 $\sigma=n$，这就归结到定理 3.11.2 中．

3．关于 Ricci 曲率的夹击

定理 3.11.9 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$紧致极小，若 M^n 的 Ricci 曲

率

$$R_{ii} \geqslant n-2, n \geqslant 4, \tag{3.11.16}$$

则 M^n 是全测地子流形,或 $n=2k, M^n=S^k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times S^k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 是 $S^{n+1}(1)$ 中的极小子流形,或 $n=4, M^4=CP^2\left(\frac{4}{3}\right)$ 是 $S^7(1)$ 中的极小子流形,其中 $CP^2\left(\frac{4}{3}\right)$ 表示截面曲率为 $\frac{4}{3}$ 的二维复射影空间.

证明:由于 M^n 极小,所以 $\sum_j h_{jj}^\alpha=0$,由式(3.7.1)得

$$R_{ii}=(n-1)-\sum_\alpha\sum_j(h_{ij}^\alpha)^2,$$

由题设

$$R_{ii}-(n-2)=1-\sum_\alpha\sum_j(h_{ij}^\alpha)^2 \geqslant 0, \tag{3.11.17}$$

上式两边关于 i 求和得

$$n \geqslant \sigma \tag{3.11.18}$$

对于固定的 α,令 $h_{ij}^\alpha=\lambda_i^\alpha\delta_{ij}$,由式(3.11.17)得

$$\sum_{\beta\neq\alpha}\sum_j(h_{ij}^\beta)^2 \leqslant 1-(\lambda_i^\alpha)^2, \tag{3.11.19}$$

由于

$$(\lambda_i^\alpha-\lambda_j^\alpha)^2 \leqslant 2[(\lambda_i^\alpha)^2+(\lambda_j^\alpha)^2], \left[\sum_i(\lambda_i^\alpha)^2\right]^2 \leqslant n\sum_i(\lambda_i^\alpha)^4, \tag{3.11.20}$$

由式(3.11.19)和式(3.11.20)得

$$2\sum_{\beta\neq\alpha}[\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]=\sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i,j}(h_{ij}^\beta)^2(\lambda_i^\alpha-\lambda_j^\alpha)^2$$

$$\leqslant 4\sum_i\left[\sum_{\beta\neq\alpha}\sum_j(h_{ij}^\beta)^2\right](\lambda_i^\alpha)^2 \leqslant 4\sum_i[1-(\lambda_i^\alpha)^2](\lambda_i^\alpha)^2$$

$$=4\sum_i(\lambda_i^\alpha)^2-4\sum_i(\lambda_i^\alpha)^4 \leqslant 4\sum_i(\lambda_i^\alpha)^2-\frac{4}{n}\left[\sum_i(\lambda_i^\alpha)^2\right]^2$$

$$=4\mathrm{tr}H_\alpha^2-\frac{4}{n}(trH_\alpha^2)^2. \tag{3.11.21}$$

在式(3.11.2)中取 $a=-1$,由式(3.11.4),式(3.11.18),式

(3.11.21)及定理 3.3.1 的(1)得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\sigma &= \sum_\alpha\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + n\sigma - \sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 \\ &\quad - 2\sum_{\alpha,\beta}\left[\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2) - \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2\right] \\ &\geqslant n\sigma - \sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 - 4\sum_\alpha\mathrm{tr}H_\alpha^2 + \frac{4}{n}\sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 \\ &= n\sigma - 4\sigma - \frac{n-4}{n}\sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 \\ &\geqslant (n-4)\sigma - \frac{n-4}{n}\sigma^2 = \frac{n-4}{n}\sigma(n-\sigma) \geqslant 0.\end{aligned}$$

于是,当 $R_{ii} > (n-2)$ 时,有 $\sigma < n$,从而 $\sigma = 0$,此时 $M^n = S^n(1)$ 是 $S^{n+p}(1)$ 中的全测地子流形 .

当 $R_{ii} = n-2$ 时,上面不等式均为等式,这时有两种情形:

(i) 在 $n \geqslant 5$ 时,$\sigma = n$,这时 $p = 1$,

$$\sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 = \left[\sum_\alpha\mathrm{tr}H_\alpha^2\right]^2 = \sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 + \sum_{\alpha\neq\beta}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)(\mathrm{tr}H_\beta^2).$$

由此得 $p-1$ 个 H_α 为零矩阵,只有一个 H_α 非零,这相当于 $p = 1$,于是问题归结为定理 3.11.2.

(ii) 在 $n = 4$ 时,使用 Jensen 获得的四维紧致齐性爱因斯坦流形的分类,便知 $M^4 = CP^2\left(\frac{4}{3}\right)$ 是 $S^7(1)$ 中的极小子流形 .

上面定理是在 $n \geqslant 4$ 的条件下,对于 $n = 3$,沈一兵教授在《中国科学》A(1),1989 年给出:

定理 3.11.10 设 $M^3 \to S^{3+p}(1)$ 紧致极小,若

$$R_{ii} \geqslant \min\left\{\frac{97+73\sqrt{3}}{184}, \frac{11p-8}{4(2p-1)}\right\} \tag{3.11.22}$$

则 M^3 必是全测地子流形 .

注 $\frac{97+73\sqrt{3}}{184} \approx 1.21435$. 特别 $p = 1$ 时,设 M^3 是 $S^4(1)$ 中的紧致极小超曲面,若 $R_{ii} \geqslant \frac{3}{4}$,则 M^3 是全测地的 .

对于 $n=3, p=1$, Nagoya 证明了：设 M^3 是 $S^4(1)$中的紧致极小超曲面，若 $R_{ii}\geqslant 0$ 且 $\sigma=\text{cnost}$，则 M^3 是全测地的子流形：$M^3=S^3(1)$，或 $M^3=S^1\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\times S^2\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

4. 关于截面曲率的夹击

陈省身先生在 1970 年给出了 $S^{n+p}(1)$中截面曲率 K 恒为正常数的极小等距浸入子流形 M^n，得到

定理 3.11.11 $M^n \triangleq S^n\left(\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\right)$是 $S^{n+p}(1)$的等距浸入极小子流形，其中 $p=\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$.

注 M^n 的截面曲率 $K=\frac{n}{2(n+1)}$，可得

$$\sigma=\frac{n(n-1)(n+2)}{2(n+1)}, \sigma=np(1-2K), \qquad (3.11.23)$$

类似于引理 3.8.2 的证明可得下面的引理：

引理 3.11.1 设 M^n 是N^{n+p}中的极小子流形，K 为M^n 上每点截面曲率 R_{ijij}的下确界，即 $K=\inf R_{ijij}$，则

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{km}^{\alpha}R_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})\geqslant n\sigma K. \qquad (3.11.24)$$

定理 3.11.12 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$紧致极小，若

$$R_{ijij}\geqslant\frac{n}{2(n+1)}, \qquad (3.11.25)$$

则或者 M^n 是全测地子流形 $S^n(1)$，或者 $M^n=S^n\left(\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\right)$是 $S^{n+p}(1)$的极小子流形，其中 $p=\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$.

证明：对于 $a:0<a<1$，由式(3.11.2)，式(3.11.24)和定理 3.3.1 的(4)得

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma\geqslant\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2-an\sigma+(1+a)n\sigma K-(1$$

$$- a)\frac{n}{2}\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2 + a\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2$$

$$= \sum_\alpha \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + n\sigma[(1+a)K - a] +$$

$$\frac{(n+2)a - n}{2}\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2.$$

取 $a = \frac{n}{n+2}$,并由式(3.11.25)得

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma \geqslant \sum_\alpha \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \frac{n}{n+2}\sigma[2(n+1)K - n] \geqslant 0. \tag{3.11.26}$$

由 Hopf 极大引理得 $\sigma =$ 常数,所以 $\Delta\sigma = 0$,由式(3.11.26)得

$$h_{ijk}^\alpha = 0 \qquad (h_{ij}^\alpha = \text{常数})$$

$$\sigma[2(n+1)K - n] = 0. \tag{3.11.27}$$

由此知,当 $R_{ijij} \geqslant K > \frac{n}{2(n+1)}$ 时,得 $\sigma = 0$,M^n 是全测地的;当 $\sigma \neq 0$ 时,有 $R_{ijij} = K = \frac{n}{2(n+1)}$ 是正常数,所以 $M^n = S^n\left(\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\right)$.

定理 3.11.13 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$紧致极小,若

$$R_{ijij} \geqslant \frac{p-1}{2p-1} \tag{3.11.28}$$

则 M^n 是全测地的,或 M^n 是 $S^{n+1}(1)$中的 Clifford 曲面,或 $M^n = S^2(\sqrt{3})$是 $S^4(1)$的 Veroness 曲面 .

证明:对于 $a: 0 < a < 1$,由式(3.11.2),式(3.11.4),式(3.11.24)及定理 3.3.1 的(1)和(3)得

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma \geqslant \sum_\alpha \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 - an\sigma + (1+a)n\sigma K + \frac{1}{p}a\sigma^2 -$$

$$(1-a)\frac{p-1}{p}\sigma^2.$$

在条件式(3.11.28)下,取 $a = \frac{p-1}{p}$得

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma \geqslant \frac{n}{p}\sigma[(2p-1)K-(p-1)] \geqslant 0, \quad (3.11.29)$$

从而得

$$\sigma[(2p-1)K-(p-1)] = 0. \quad (3.11.30)$$

当 $R_{ijij} \geqslant K > \frac{p-1}{2p-1}$ 时，$\sigma = 0, M^n$ 是全测地的；当 $\sigma \not\equiv 0$ 时，$R_{ijij} = K = \frac{p-1}{2p-1}$，此时上面所用的不等式均为等式，特别

$$\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) - \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)(\mathrm{tr}H_\beta^2) = \frac{p-1}{p}[\sum_\alpha \mathrm{tr}H_\alpha^2]^2.$$

该等式成立当且仅当至多有两个矩阵 H_{n+1} 和 H_{n+2} 非零，并且

$$H_{n+1} = \lambda\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad H_{n+2} = u\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right].$$

这归结到定理 3.11.2.

定理 3.11.14 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$ 紧致极小，若

$$R^\perp = 0, R_{ijij} \geqslant 0 \quad (3.11.31)$$

则 $M^n = S^{m_1}\left(\sqrt{\frac{m_1}{n}}\right) \times \cdots \times S^{m_{p+1}}\left(\sqrt{\frac{m_{p+1}}{n}}\right), \sum_{i=1}^{p+1} m_i = n$.

证明：因为 $R^\perp = 0$，由式(3.5.29) 知，$H_{n+1}, \cdots, H_{n+p}$ 可同时对角化，即对任 α，可设 $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$，并且式(3.5.26) 成立，在式(3.11.2) 中取 $a = 0$ 得：

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma = \sum_\alpha \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_\alpha \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha R_{mijk} + h_{im}^\alpha R_{mkjk})$$

$$= \sum_\alpha \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \frac{1}{2}\sum_\alpha \sum_{i,j}(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha)^2 R_{ijij} \geqslant 0.$$

故可得 $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$ 是常数，及 $(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha)^2 R_{ijij} = 0$，由此可导出 $T(M)$ 为 $p+1$ 个平均分布的正交和 .

5. 关于数量曲率和截面曲率相关的夹击问题

对于常曲率空间 $N^{n+p}(c)$ 中的极小子流形 M^n，当 M^n 的数

量曲率 r(或第二基本形式模长的平方 σ)与截面曲率之间满足某些关系时,也可得到子流形的一些性质．下面是 S. Y. Tau 教授的几个结果．

定理 3.11.15 设 $M^n \to N^{n+p}(c)$ 紧致极小,$K = \inf R_{ijij}$,若

$$\sigma \geqslant np(c-2K),(\sigma \geqslant np(c-K), K<0), \tag{3.11.32}$$

则或者 M^n 是全测地子流形,或者 $\sigma = np(c-2K)$,($\sigma = np(c-K), K<0$).

证明:对于 $a \geqslant 1$,因为

$$-(1-a)\sum_{\alpha,\beta}[tr(H_\alpha^2 H_\beta^2) - tr(H_\alpha H_\beta)^2] \geqslant 0, \tag{3.11.33}$$

由式(3.11.2),式(3.11.4),式(3.11.24)及定理 3.3.4 的(1)得

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma \geqslant \sum_\alpha \sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 - anc\sigma + (1+a)n\sigma K + \frac{a}{p}\sigma^2$$
$$\geqslant \frac{a}{p}\sigma[\sigma - np(c - \frac{1+a}{a}K)].$$

由于 M^n 紧致,两边积分得

$$\int_M \sigma\left[\sigma - np\left(c - \frac{1+a}{a}K\right)\right]dv \leqslant 0. \tag{3.11.34}$$

因为 $f(a) \triangleq -\frac{1+a}{a}$ 在$[1,+\infty]$上单调递增,所以当 $K \geqslant 0$ 时,$F(a) \triangleq np\left(c - \frac{1+a}{a}K\right)$在$a=1$时取最大值,由式(3.11.34)得

$$\int_M \sigma[\sigma - np(c-2K)]dv \leqslant 0, K \geqslant 0, \tag{3.11.35}$$

当 $K<0$ 时,$f(a) \triangleq -\frac{1+a}{a}K$ 在$[1,+\infty)$上单调递减,当 $a \to +\infty$ 时,$F(a)$ 取最小值,由式(3.11.33) 得:

$$\int_M \sigma[\sigma - np(c-K)]dv \leqslant 0, K<0, \tag{3.11.36}$$

由式(3.11.35)和式(3.11.36)我们得定理 3.11.15 成立．

定理 3.11.16 设 $M^n \to N^{n+p}(c)$ 紧致极小,$K = \inf R_{ijij}$,

$r = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i R_{ii}$ 是平均数量曲率,若

$$K \leqslant r \leqslant \frac{n-1-p}{n-1}c + \frac{2p}{n-1}K, K \geqslant 0 \quad (3.11.37)$$

$$(K \leqslant r \leqslant \frac{n-1-p}{n-1}c + \frac{p}{n-1}K, K < 0),$$

则 M^n 是全测地子流形,或 $r = \frac{n-1-p}{n-1}c + \frac{2p}{n-1}K$, $(r = \frac{n-1-p}{n-1}c + \frac{p}{n-1}K, K < 0)$.

证明:因为 M^n 极小,所以$\sum_k h_{kk}^\alpha = 0$,由式(3.7.1)得

$$R_{ii} = (n-1)c\delta_{ii} - \sum_\alpha \sum_k (h_{ik}^\alpha)^2.$$

所以 $n(n-1)r = \sum_i R_{ii} = n(n-1)c - \sum_\alpha \sum_{i,k} (h_{ik}^\alpha)^2$

$$= n(n-1)c - \sigma,$$

得

$$\sigma = n(n-1)(c-r).$$

从而定理 3.11.15 的条件 $\sigma \geqslant np(c-2K)$为

$$n(n-1)(c-r) \geqslant np(c-2K).$$

它等价于 $r \leqslant \frac{n-1-p}{n-1}c + \frac{2p}{n-1}K$,又因为 $R_{ijij} \geqslant K$,所以 $r = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i R_{ii} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i \sum_{j \neq i} R_{ijij} \geqslant \frac{1}{n(n-1)} \sum_i \sum_{j \neq i} K = K$,故条件 $\sigma \geqslant np(c-2K)$ 等价于

$$K \leqslant r \leqslant \frac{n-1-p}{n-1}c + \frac{2p}{n-1}K.$$

由定理 3.11.15 得 M^n 是全测地的,或 $r = \frac{n-1-p}{n-1}c + \frac{2p}{n-1}K(K \geqslant 0)$;$(r = \frac{n-1-p}{n-1} + \frac{p}{n-1}K, K < 0)$.

注 对于 $r = \sum_i R_{ii}$,条件式(3.11.27) 等价于

$$n(n-1)K \leqslant r \leqslant n(n-1-p)c + 2npK \quad (K \geqslant 0). \tag{3.11.38}$$

定理 3.11.17 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$ 紧致极小,如果

$$R_{ijij} \geqslant 0 \text{ 且 } \quad \sigma = np, \tag{3.11.39}$$

那么 $M^n = S^{m_1}\left(\sqrt{\frac{m_1}{n}}\right) \times \cdots \times S^{m_{p+1}}\left(\sqrt{\frac{m_{p+1}}{n}}\right), \sum_{i=1}^{p+1} m_i = n$.

证明:因 $c = 1, R_{ijij} \geqslant 0$, 得 $K = 0$, 对任 $a > 1$, 由式(3.11.2),式(3.11.4),式(3.11.24),式(3.11.33) 和定理 3.3.1 的(1) 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\sigma &\geqslant \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 - an\sigma + \frac{a}{p}\sigma^2 \\ &= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \frac{a}{p}\sigma[\sigma - np] \geqslant 0.\end{aligned}$$

由于 M^n 紧致,得 $\sigma =$ 常数,所以 $\Delta\sigma = 0$. 故上所用不等式均为等式,由式(3.11.33) 得

$$\sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(H_{\alpha}^2H_{\beta}^2) - \operatorname{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^2] = 0.$$

即 $H_{\alpha}H_{\beta} = H_{\beta}H_{\alpha}$,所以 M^n 的法丛平坦,故对任 $\alpha, H_{\alpha} = (h_{ij}^{\alpha})$ 可对角化,令 $h_{ij}^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$,从而得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\sigma &= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{km}^{\alpha}R_{mijk} + h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk}) \\ &= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{i,j}(\lambda_i^{\alpha} - \lambda_j^{\alpha})R_{ijij} \geqslant 0.\end{aligned}$$

由此得

$$h_{ijk}^{\alpha} = 0, \text{即 } h_{ij}^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha}\delta_{ij} = \text{常数}, \tag{3.11.40}$$

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j}(\lambda_i^{\alpha} - \lambda_j^{\alpha})^2R_{ijij} = 0. \tag{3.11.41}$$

由于 $R_{ijij} \geqslant 0$,由式(3.11.40) 和式(3.11.41) 得 $T(M)$ 为 $p+1$ 个平均分布的正交和,即 $M^n = S^{m_1}\left(\sqrt{\frac{m_1}{n}}\right) \times \cdots \times S^{m_{p+1}}\left(\sqrt{\frac{m_{p+1}}{n}}\right)$,其中 $m_1 + \cdots + m_{p+1} = n$.

定理 3.11.18 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$ 紧致极小,若

$$-\frac{n-1-p}{p} \leqslant R_{ijij} \leqslant 0, \tag{3.11.42}$$

则 $M^n = S^1\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) \times \cdots \times S^1\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ 是 $S^{2n-1}(1)$ 中的极小子流形 .

证明:取 $K = -\frac{n-1-p}{p}$,由于 $K \leqslant R_{ijij} \leqslant 0$,得 $r \leqslant 0$,从而

$$K \leqslant r \leqslant \frac{n-1-p}{n-1} \cdot 1 + \frac{p}{n-1}\left(-\frac{n-1-p}{p}\right) = 0.$$

所以定理 3.11.16 的条件满足,得 $r = 0$,又 $R_{ijij} \leqslant 0$,

$$r = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i \sum_{j \neq i} R_{ijij} = 0, \text{得 } R_{ijij} = 0, \text{从而 } R_{ijkl} = 0.$$

所以 M^n 是平坦流形,又因为

$$n(n-1)r = n(n-1)c - \sigma, c = 1,$$

所以 $r = 0 \Leftrightarrow \sigma = n(n-1) \triangleq np, p = n-1$,再由 $R_{ijij} = 0$ 知,定理 3.11.17 的条件满足,故结论成立.

注 对于 $r = \sum_i R_{ii}$,定理 3.11.18 仍成立 .

定理 3.11.19 设 $M^n \to S^{n+p}(1)$ 紧致极小,若 M^n 的平均数量曲率是以下常数

$$r = \frac{n-1-p}{n-1} (\text{即 } R_{ii} = n-1-p) \text{ 且 } R_{ijij} \geqslant 0, \tag{3.11.43}$$

则 $M^n = S^{m_1}\left(\sqrt{\frac{m_1}{n}}\right) \times \cdots \times S^{m_{p+1}}\left(\sqrt{\frac{m_{p+1}}{n}}\right), m_1 + \cdots + m_{p+1} = n$.

证明:由于 $n(n-1)r = n(n-1) - \sigma$,所以

$$\sigma = n(n-1) - n(n-1) \cdot \frac{n-1-p}{n-1} = np.$$

又因为 $R_{ijij} \geqslant 0$,由定理 3.11.17 得证 .

注 关于 3.11 节中的夹击问题,目前人们仍在不断改进,同

时已将外围空间推广到复射影空间 CP^n，但要得到较为漂亮的结果是困难的．

3.12 局部对称的 Riemann 流形中的子流形

1. 局部对称的 Riemann 流形

定义 3.12.1 若 Riemann 流形 $(N^{n+p},\bar{g})$ 的曲率张量场 K_{ABCD} 的协变导数为零，即

$$K_{ABCD;E}=0, \tag{3.12.1}$$

则称 $(N^{n+p},\bar{g})$ 是局部对称的黎曼流形．

曲率张量场 K_{aijk} 的协变导数 $K_{aijk;l}$ 定义为

$$\begin{aligned}\sum_l K_{aijkl}\omega_l = {} & \mathrm{d}K_{aijk}+\sum_m K_{mijk}\omega_{ma}+\sum_\beta K_{\alpha\beta jk}\omega_{\beta i} \\ & +\sum_\beta K_{ai\beta k}\omega_{\beta j}+\sum_\beta K_{aij\beta}\omega_{\beta k},\end{aligned} \tag{3.12.2}$$

又 $\omega_{i\beta}=\sum_l h_{il}^\beta\omega_l, \mathrm{d}K_{aijk}=\sum_l e_l(K_{aijk})\omega_l\triangleq\sum_l K_{aijkl}\omega_l$，从而式 (3.12.2) 为：

$$\begin{aligned}&\sum_l K_{aijk;l}\omega_l \\ &=\sum_l K_{aijkl}\omega_l+\sum_{m,l}K_{mijk}h_{ml}^a\omega_l-\sum_{\beta,l}K_{\alpha\beta jk}h_{il}^\beta\omega_l \\ &\quad -\sum_{\beta,l}K_{ai\beta k}h_{jl}^\beta\omega_l-\sum_{\beta,l}K_{aij\beta}h_{kl}^\beta\omega_l.\end{aligned} \tag{3.12.3}$$

式(3.12.3) 等价于：

$$\begin{aligned}K_{aijk;l}= {} & K_{aijkl}+\sum_m K_{mijk}h_{ml}^a-\sum_\beta K_{\alpha\beta jk}h_{il}^\beta \\ & -\sum_\beta K_{ai\beta k}h_{jl}^\beta-\sum_\beta K_{aij\beta}h_{kl}^\beta.\end{aligned} \tag{3.12.4}$$

注 式(3.12.3) 是一次微分形式的等式，式(3.12.4) 是函数的等式，二者等价．

设 N^{n+p} 是局部对称的黎曼流形，由式(3.12.4) 得

$$K_{\alpha ijkl} = \sum_{\beta} K_{\alpha\beta jk} h_{il}^{\beta} + \sum_{\beta} K_{\alpha i\beta k} h_{jl}^{\beta} + \sum_{\beta} K_{\alpha ij\beta} h_{kl}^{\beta} - \sum_{m} K_{mijk} h_{ml}^{\alpha} \tag{3.12.5}$$

由式(2.3.18)、式(3.12.1) 和式(3.12.5)，式(3.3.24) 的第二项为

$$\begin{aligned}
& -\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}(K_{\alpha kikj} + K_{\alpha ijkk}) \\
= & -\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}\Big[\sum_{\beta} K_{\alpha\beta ik} h_{kj}^{\beta} + \sum_{\beta} K_{\alpha k\beta k} h_{ij}^{\beta} + \sum_{\beta} K_{\alpha ki\beta} h_{kj}^{\beta} - \sum_{m} K_{mkik} h_{mj}^{\alpha}\Big] \\
& -\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}\Big[\sum_{\beta} K_{\alpha\beta jk} h_{ik}^{\beta} + \sum_{\beta} K_{\alpha i\beta k} h_{jk}^{\beta} \\
& + \sum_{\beta} K_{\alpha ij\beta} h_{kk}^{\beta} - \sum_{m} K_{mijk} h_{mk}^{\alpha}\Big] \\
= & -\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}\big[h_{kj}^{\beta} K_{\alpha\beta ik} + h_{kj}^{\beta} K_{\alpha ki\beta} + h_{ik}^{\beta} K_{\alpha\beta jk} + h_{jk}^{\beta} K_{\alpha i\beta k}\big] \\
& -\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}\big[h_{ij}^{\beta} K_{\alpha k\beta k} + h_{kk}^{\beta} K_{\alpha ij\beta}\big] \\
& +\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha} K_{mijk} + h_{mj}^{\alpha} K_{mkik}) \\
= & \; 3\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{jk}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} K_{\alpha\beta ij} - \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} \sum_{k} K_{\alpha k\beta k} \\
& -\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} K_{\alpha ij\beta} \sum_{k} h_{kk}^{\beta} + \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha} K_{mijk} + h_{mi}^{\alpha} K_{mkjk}).
\end{aligned} \tag{3.12.6}$$

将式(3.12.6) 代入到式(3.3.24) 中得

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \\
= & \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} - \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} K_{\alpha ij\beta} \sum_{k} h_{kk}^{\beta} \\
& + \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k}\big[3 h_{jk}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} K_{\alpha\beta ij} - h_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} K_{\alpha k\beta k} + h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} R_{\beta\alpha jk}^{\perp}\big] \\
& + \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m}\big[h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha} K_{mijk} + h_{mi}^{\alpha} K_{mkjk} + h_{mk}^{\alpha} R_{mijk} + h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk})\big].
\end{aligned} \tag{3.12.7}$$

由式(3.3.16)，我们有

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk} + h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})$$
$$= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{mk}^{\alpha}K_{mijk} + \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{mk}^{\alpha}(h_{mj}^{\beta}h_{ik}^{\beta} - h_{mk}^{\beta}h_{ij}^{\beta})$$
$$+ \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk} + \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{mi}^{\alpha}(h_{mj}^{\beta}h_{kk}^{\beta} - h_{mk}^{\beta}h_{kj}^{\beta})$$
$$= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}K_{mijk} + h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk}) + \sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_{\alpha}^{2}H_{\beta})\mathrm{tr}H_{\beta}$$
$$- \sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}^{2}H_{\beta}^{2}) - \mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^{2}] - \sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})]^{2}. \tag{3.12.8}$$

由式(3.3.20)得

$$\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R_{\beta\alpha jk}^{\perp}$$
$$= \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}K_{\beta\alpha jk} + \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}(h_{mj}^{\beta}h_{mk}^{\beta} - h_{mk}^{\beta}h_{mj}^{\alpha})$$
$$= \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{kj}^{\alpha}h_{ki}^{\beta}K_{\alpha\beta ij} - \sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}^{2}H_{\beta}^{2}) - \mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^{2}]. \tag{3.12.9}$$

将式(3.12.9)代入到式(3.12.7)中得

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$$
$$= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}h_{kkij}^{\alpha} - \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}K_{\alpha ij\beta}\sum_{k} h_{kk}^{\beta} + 4\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}K_{\alpha\beta ij}$$
$$- \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}h_{ji}^{\beta}K_{\alpha k\beta k} + \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}K_{mijk} + h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk})$$
$$+ \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk} + h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk}) - \sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}^{2}H_{\beta}^{2}) - \mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^{2}]. \tag{3.12.10}$$

式(3.12.10)很重要,再由式(3.12.8)得:对任意实数 a,有

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} = \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}h_{kkij}^{\alpha} - \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}K_{\alpha ij\beta}\cdot\mathrm{tr}H_{\beta}$$
$$+ 4\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}K_{\alpha\beta ij} - \sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})\sum_{k} K_{\alpha k\beta k} + a\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})]^{2}$$
$$+ (1-a)\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}K_{mijk} + h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk})$$

$$+ (1+a)\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk} + h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})$$
$$- (1-a)\sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2}H_{\beta}^{2}) - \operatorname{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^{2}] - a\sum_{\alpha,\beta}\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2}H_{\beta})\operatorname{tr}H_{\beta}. \tag{3.12.11}$$

注 常曲率流形一定是局部对称的流形，事实上：设 $N^{n+p}(c)$ 是常曲率为 c 的流形，则 $K_{\alpha ijk} = 0, K_{\alpha ijkl} = 0$，由式(3.12.4)得

$$\begin{aligned} K_{\alpha ijk;l} &= 0 + c\sum_{m}(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij})h_{ml}^{\alpha} - 0 \\ &\quad - c\sum_{\beta}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik} - \delta_{\alpha k}\delta_{i\beta})h_{jl}^{\beta} - c\sum_{\beta}(\delta_{\alpha j}\delta_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij})h_{kl}^{\beta} \\ &= c\delta_{ik}h_{jl}^{\alpha} - c\delta_{ij}h_{kl}^{\alpha} - c\delta_{ik}h_{jl}^{\alpha} + c\delta_{ij}h_{kl}^{\alpha} = 0, \end{aligned}$$

所以 $N^{n+p}(c)$ 是局部对称的黎曼流形.

定义 3.12.2 若 Riemann 流形$(N^{n+p}, \bar{g})$的截面曲率 K_N 满足

$$\frac{1}{2} < \delta \leqslant K_N \leqslant 1, \tag{3.12.12}$$

则称 N^{n+p}为 $n+p$ 维 δ—Pinching 黎曼流形.

2. 局部对称空间中具有平行中曲率向量的子流形

设 M^n 是局部对称的黎曼流形 N^{n+p} 中具有平行中曲率向量的子流形，选取 M^n 的法标架场 $e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$，使

$$\overline{H} = He_{n+p}, \tag{3.12.13}$$

从而得

$$\operatorname{tr}H_{n+p} = \sum_{i}h_{ii}^{n+p} = nH \tag{3.12.14}$$

$$\operatorname{tr}H_{\alpha} = \sum_{i}h_{ii}^{\alpha} = 0(\alpha \neq n+p). \tag{3.12.15}$$

由式(3.5.15)及式(3.8.5)和式(3.8.6)得

$$\sum_{k}h_{kkij}^{\alpha} = 0, \alpha = n+1, \cdots, n+p, \tag{3.12.16}$$

$$H = \text{常数}, R_{n+p\alpha jk}^{\perp} = 0, \forall\alpha. \tag{3.12.17}$$

由式(3.12.14) - 式(3.12.16),在式(3.12.11)中取 $a=-1$ 得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$$
$$=-nH\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}K_{\alpha ijn+p}+4\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}K_{\alpha\beta ij}$$
$$-\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)\sum_k K_{\alpha k\beta k}+2\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}K_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk})$$
$$-2\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]-\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2$$
$$+\sum_{\alpha\neq n+p}\{\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_{n+p})\operatorname{tr}H_{n+p}-[\operatorname{tr}(H_\alpha H_{n+p})]^2\}.\tag{3.12.18}$$

Golderg S T 在 1962 年给出如下引理

引理 3.12.1 设 N^{n+p} 是 $n+p$ 维黎曼流形,若 N^n 的截面曲率 K_N 满足:$0<\delta\leqslant K_N\leqslant 1$,则:

(1) $|K_{ABCD}|\leqslant\frac{2}{3}(1-\delta)$, A,B,C,D 互不相同,

(2) $|K_{ACBC}|\leqslant\frac{1}{2}(1-\delta)$, A,B 互不相同.

定理 3.12.1 设 N^{n+p} 是 $n+p$ 维局部对称完备的 δ-Pinching黎曼流形,M^n 是 N^{n+p} 中具有平行中曲率向量的紧致子流形($p\geqslant 2$),若 M^n 的第二基本形式模长的平方 σ 满足

$$\left(3+n^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{p-1}\right)\tau^{\frac{1}{2}}\sigma+\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)[4(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+|H|(p-1)^{\frac{1}{2}}]$$
$$\leqslant n(2\delta-1)\tau^{\frac{1}{2}},\tag{3.12.19}$$

其中 $\tau\triangleq\sum_{\alpha\neq n+p}\operatorname{tr}H_\alpha^2$ 和中曲率 H 都是常数,常数 δ 满足:

$\frac{1}{2}<\delta\leqslant 1$,则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的超曲面.

证明:对固定的 $\alpha\neq n+p$,令 $h_{ij}^{\alpha}=\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$,由引理 3.12.1 得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}K_{\alpha ijn+p}$$

$$\leqslant \frac{2}{3}(1-\delta)\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}|h_{ij}^{\alpha}|$$

$$\leqslant \frac{2}{3}(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}\Big[\sum_{\alpha\neq n+p}\Big(\sum_{i}|\lambda_i^{\alpha}|\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{2}{3}(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12.20}$$

$$4\sum_{\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}K_{\alpha\beta ij}h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta} = 4\sum_{\beta\neq n+p,\alpha}\sum_{i\neq k}K_{\alpha\beta ik}\lambda_k^{\alpha}h_{ik}^{\beta}$$

$$\geqslant -\frac{8}{3}(1-\delta)\sum_{\alpha\neq n+p,\alpha}\sum_{i\neq k}|\lambda_k^{\alpha}||h_{ik}^{\beta}|$$

$$\geqslant -\frac{4}{3}(1-\delta)\sum_{\beta\neq n+p,\alpha}\sum_{i\neq k}[(n-1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda_k^{\alpha})^2+(n-1)^{\frac{1}{2}}(h_{ik}^{\beta})^2]$$

$$\geqslant -\frac{4}{3}(1-\delta)(n-1)^{\frac{1}{2}}(p-2)\mathrm{tr}H_{\alpha}^2$$

$$-\frac{4}{3}(1-\delta)(n-1)^{\frac{1}{2}}\sum_{\beta\neq n+p,\alpha}\mathrm{tr}H_{\beta}^2.$$

又 $\sum_{\beta\neq n+p,\alpha}\mathrm{tr}H_{\beta}^2 = \sum_{\beta\neq n+p}\mathrm{tr}H_{\beta}^2 - \mathrm{tr}H_{\alpha}^2 = \tau - \mathrm{tr}H_{\alpha}^2$,由此得

$$4\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}K_{\alpha\beta ij}h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta} \geqslant -\frac{4}{3}(1-\delta)(n-1)^{\frac{1}{2}}[(p-2)\tau$$

$$+(p-1)\tau-\tau]$$

$$= -\frac{8}{3}(1-\delta)(n-1)^{\frac{1}{2}}(p-2)\tau \geqslant -\frac{8}{3}(1-\delta)n^{\frac{3}{2}}(p-2)\tau. \tag{3.12.21}$$

由式(3.8.9)和式(3.12.12)得

$$\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{k}K_{\alpha k\beta k}\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta\neq n+p\\ \alpha\neq\beta}}\sum_{k}K_{\alpha k\beta k}\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta}) + \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{k}K_{\alpha k\alpha k}\mathrm{tr}H_{\alpha}^2$$

$$= \sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{k}K_{\alpha k\alpha k}\mathrm{tr}H_{\alpha}^2 \leqslant n\tau. \tag{3.12.22}$$

又因为

$$2\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}K_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk})$$
$$=\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,k}(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_k^{\alpha})^2K_{ikik}\geqslant 2n\delta\tau. \tag{3.12.23}$$

因 $\mathrm{tr}H_{n+p}^2\leqslant\sigma$，由式(3.8.13) 得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\{\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_{n+p})\mathrm{tr}H_{n+p}-[\mathrm{tr}(H_\alpha H_{n+p})^2]\}$$
$$\leqslant(1+n^{\frac{1}{2}})\tau\sigma, \tag{3.12.24}$$

因为 $n^{\frac{3}{2}}\geqslant n^{\frac{1}{2}}, n^{\frac{3}{2}}>(n-1)^{\frac{1}{2}}, \tau\leqslant\sigma$，由式(3.12.18)，式(3.8.9)，定理 3.8.1 的 (1) 和 (2) 及式 (3.12.20)—— 式(3.12.24) 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\\
&\geqslant-\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)\mid H\mid(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau\\
&\quad-n\tau+2n\delta\tau-2[\tau^2-\sum_{\alpha\neq n+p}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2]-\sum_{\alpha\neq n+p}(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2-(1+n^{\frac{1}{2}})\tau\sigma\\
&\geqslant-\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)\mid H\mid(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau-n\tau\\
&\quad+2n\delta\tau-(2-\frac{1}{p-1})\tau\sigma-(1+n^{\frac{1}{2}})\tau\sigma\\
&=\tau^{\frac{1}{2}}\{(2\delta-1)n\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}(1-\delta)n^{\frac{3}{2}}[4(p-2)\tau^2+\mid H\mid(p-1)^{\frac{1}{2}}]\\
&\quad-\left(3+n^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{p-1}\right)\tau^{\frac{1}{2}}\sigma\}.
\end{aligned} \tag{3.12.25}$$

在条件式(3.12.19) 下，我们有

$$\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant 0. \tag{3.12.26}$$

因 M^n 紧致，由 Hopf 引理得 $\tau=$ 常数，再由式(3.12.25)和式(3.12.26)得 $\tau=0$，即

$$h_{ij}^{\alpha} = 0, \forall i,j; \alpha \neq n+p, \qquad (3.12.27)$$

或

$$(2\delta - 1)n\tau^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(1-\delta)n^{\frac{3}{2}}[4(p-2)\tau^{\frac{1}{2}} + |H|(p-1)^{\frac{1}{2}}]$$

$$- \left(3 + n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{p-1}\right)\tau^{\frac{1}{2}}\sigma = 0. \qquad (3.12.28)$$

当式(3.12.28)成立时,上面各式均取等号,由式(3.12.21)取等号得 $\delta = 1$,从而式(3.12.25)为:

$$\sum_{\alpha \neq n+p} \sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \geqslant \tau\left[n - \left(3 + n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{p-1}\right)\sigma\right] \geqslant 0. \qquad (3.12.29)$$

此时归结为定理3.8.2,易见 $\tau = 0$,所以 M^n 是 N^{n+p} 的一个 $n+1$ 维全测地子流形 N^{n+1} 中的超曲面.

注 在定理3.12.4中,当 $N^{n+p} = S^{n+p}(1)$ 时,即 $\delta = 1$ 时,条件式(3.12.19)就是条件式(3.8.10),故定理3.12.4是定理3.8.2的推广.

同理可证下面定理成立.

定理3.12.2 设 N^{n+p} 是 $n+p$ 维局部对称完备的 δ-Pinching 黎曼流形,M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致子流形 $(p \geqslant 2)$,若

$$(\sqrt{n-1} + 1)\tau^{\frac{1}{2}}\sigma + \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)[4(p-2)\tau^{\frac{1}{2}} + |H|(p-1)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\leqslant n(2\delta - 1 + H^2)\tau^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.12.30)$$

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的超曲面.

注 当 $N^{n+p} = S^{n+p}(1)$,即 $\delta = 1$ 时,条件式(3.12.30)就是定理3.8.4中的条件式(3.8.18),故定理3.12.2是定理3.8.4的推广.

3. 局部对称空间中具有平行中曲率向量的伪脐子流形

设 M^n 是局部对称的黎曼流形 N^{n+p} 中具有平行中曲率向量的伪脐子流形,并设 $\overline{H} = He_{n+p}$,因 M^n 伪脐,所以

$$h_{ij}^{n+p} = H\delta_{ij}, \qquad (3.12.31)$$

令 $\tau = \sum_{\alpha \neq n+p} \mathrm{tr} H_{\alpha}^2$,从而得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta)\mathrm{tr}H_\beta = nH\sum_{\alpha\neq n+p}\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_{n+p})$$
$$= nH\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}h_{ij}^\alpha h_{jk}^\alpha h_{ki}^{n+p} = nH^2\tau. \tag{3.12.32}$$

并且有

$$\tau = \sigma - \mathrm{tr}H_{n+p}^2 = \sigma - nH^2. \tag{3.12.33}$$

再由式(3.12.11)得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha$$
$$= -nH\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha K_{\alpha ijn+p} + 4\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta K_{\alpha\beta ij}$$
$$-\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)\sum_k K_{\alpha k\beta k} + a\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2$$
$$-(1-a)\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2) - \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2] - anH^2\tau$$
$$+(1-a)\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha K_{mijk} + h_{mi}^\alpha K_{mkjk})$$
$$+(1+a)\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha R_{mijk} + h_{mi}^\alpha R_{mkjk}) \tag{3.12.34}$$

定理 3.12.3 设 N^{n+p} 是局部对称完备的 δ-Pinching 黎曼流形,M^n 是 N^{n+p} 中具有平行中曲率向量的紧致伪脐子流形($p\geqslant 2$),如果 M^n 的截面曲率 R_{ijij} 满足

$$(2p-3)\tau^{\frac{1}{2}}R_{ijij}$$
$$\geqslant [p-1-\delta+(p-2)H^2]\tau^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)[4(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}$$
$$+|H|(p-1)^{\frac{1}{2}}], \tag{3.12.35}$$

其中 $\tau = \sum_{\alpha\neq n+p}\mathrm{tr}H_\alpha^2$ 和中曲率 H 都是常数,常数 δ 满足 $\frac{1}{2}<\delta\leqslant 1$,那么 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形 .

证明:因为 $n^{\frac{3}{2}}\geqslant n^{\frac{1}{2}}, n^2\geqslant n^{\frac{3}{2}}\geqslant (n-1)^{\frac{1}{2}}$,在式(3.12.35)中,对于实数 a:$0\leqslant a<1$,由式(3.12.20),式(3.12.21),式(3.12.22),式(3.12.23),式(3.8.31),式(3.8.9)及定理3.8.1的(1)和(3)得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant -\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)|H|(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}$$

$$-anH^2\tau-\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau-n\tau+(1-a)n\delta\tau$$

$$+(1+a)n\tau R_M-(1-a)\frac{p-2}{p-1}\tau^2+a\frac{1}{p-1}\tau^2. \qquad (3.12.36)$$

在式(3.12.26)中取 $a=\frac{p-2}{p-1}$ 得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant -\frac{2}{3}(1-\delta)n^{\frac{3}{2}}|H|(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{p-2}{p-1}nH^2\tau-\frac{8}{3}(1-\delta)n^{\frac{3}{2}}(p-2)\tau-n\tau+\frac{1}{p-1}n\delta\tau$$

$$+\frac{2p-3}{p-1}n\tau R_M$$

$$=\frac{n}{p-1}\tau^{\frac{1}{2}}\{(2p-3)\tau^{\frac{1}{2}}R_M-[p-1-\delta+(p-2)H^2]\tau^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{2}{3}(1-\delta)n^{\frac{3}{2}}[|H|(p-1)^{\frac{1}{2}}+4(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}]\} \qquad (3.12.37)$$

又因为 $R_M\leqslant R_{ijij}$,在条件式(3.12.35)下,有

$$\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant 0$$

$$(3.12.38)$$

又 M^n 紧致. 由 Hopf 引理得 $\tau=$ 常数,再由式(3.12.37)和式(3.12.38)得 $\tau=0$,即

$$h_{ij}^{\alpha}=0,\forall i,j;\alpha\neq n+p, \qquad (3.12.39)$$

或

$$(2p-3)\tau^{\frac{1}{2}}R_M-[p-1-\delta+(p-2)H^2]\tau^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{2}{3}(1-\delta)n^{\frac{3}{2}}[|H|(p-1)^{\frac{1}{2}}+4(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}]=0. \qquad (3.12.40)$$

当式(3.12.40)成立时,以上所用到的不等式均为等式,由式(3.12.21)为等式得 $\delta=1$,所以式(3.12.37)为

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\frac{n}{p-1}\tau[(2p-3)R_M-(p-2)(1+H^2)]\geqslant 0$$

$$(3.12.41)$$

此时归结为定理3.8.9，易见 $\tau = 0$，再由式(3.12.31)知，M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形.

注 当 $\delta = 1$ 时，易见定理3.12.3是定理3.8.9的推广.

同理可得下面两定理成立.

定理 3.12.4 设 M^n 是局部对称的 δ-Pingching 黎曼流形 N^{n+p} 中的具有平行中曲率向量的紧致伪脐子流形($p \geqslant 2$)，若

$$\begin{aligned}&2(n+1)\tau^{\frac{1}{2}}R_{ijij}\\ \geqslant&[2(1-\delta)+n(1+H^2)]\tau^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(1-\delta)n^{\frac{3}{2}}[\,|H|(p-1)^{\frac{1}{2}}\\ &+4(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}].\end{aligned}\tag{3.12.42}$$

则 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形.

定理 3.12.5 同上定理的条件，若

$$\begin{aligned}&[1+\mathrm{sgn}(p-2)]\tau^{\frac{1}{2}}\sigma\\ \leqslant&(2\delta-1+H^2)n\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}(1-\delta)n^{\frac{3}{2}}[\,|H|(p-1)^{\frac{1}{2}}+4(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}].\end{aligned}\tag{3.12.43}$$

则 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形.

注 显然定理3.12.4是定理3.8.10的推广.

4. 局部对称黎曼流形中的极小子流形

设 M^n 是局部对称黎曼流形 N^{n+p} 中的极小子流形，则

$$\mathrm{tr}H_\alpha=\sum_i h_{ii}^\alpha=0,\alpha=n+1,\cdots,n+p.\tag{3.12.44}$$

由协变导数的定义易得

$$\sum_k h_{kkij}^\alpha=0,\forall\, i,j,\alpha.\tag{3.12.45}$$

由式(3.12.11)，对任意实数 a 有：

$$\begin{aligned}\sum_\alpha\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha=&4\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k}h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta K_{\alpha\beta ij}-\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)\sum_k K_{\alpha k\beta k}\\ &+a\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2+(1-a)\sum_\alpha\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha K_{mijk}+h_{mi}^\alpha K_{mkjk})\end{aligned}$$

$$+(1+a)\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})$$

$$-(1-a)\sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]. \tag{3.12.46}$$

因 $A_{\alpha\beta}=(\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta))$ 是 p 阶对称方阵,所以可设

$$\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)=\operatorname{tr}H_\alpha^2\cdot\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.12.47}$$

定理 3.12.6 设 M^n 是局部对称完备的 δ-Pinching 黎曼流形 N^{n+p} 中的极小子流形,如果 M^n 的第二基本形式模长的平方 σ 满足

$$\sigma\leqslant\frac{(2\delta-1)n-\frac{8}{3}(1-\delta)(p-1)n}{2-\frac{1}{p}} \tag{3.12.48}$$

则 M^n 必为下列情形之一

(1) $\sigma=0$,M^n 是全测地子流形,并且 M^n 也是局部对称的 .

(2) $\sigma=\dfrac{n}{2-\frac{1}{p}}$,且 M^n 或者是 $S^{n+1}(1)$ 中的 Clifford 极小超曲面,或者是 $S^4(1)$ 中的 Veroness 曲面 $S^2(\sqrt{3})$.

证明:对固定的 α,令 $h_{ij}^{\alpha}=\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$,由引理 3.12.3 得

$$4\sum_{\beta}\sum_{i,j,k}h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}K_{\alpha\beta ij}=4\sum_{\beta}\sum_{i,k}\lambda_k^{\alpha}h_{ik}^{\beta}K_{\alpha\beta ik}$$

$$\geqslant-\frac{8}{3}(1-\delta)\sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\neq k}|\lambda_k^{\alpha}||h_{ik}^{\beta}|$$

$$\geqslant-\frac{4}{3}(1-\delta)\sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\neq k}[(n-1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda_k^{\alpha})^2+(n-1)^{\frac{1}{2}}(h_{ik}^{\beta})^2]$$

$$\geqslant-\frac{4}{3}(1-\delta)(n-1)^{\frac{1}{2}}(p-1)\operatorname{tr}H_\alpha^2$$

$$-\frac{4}{3}(1-\delta)(n-1)^{\frac{1}{2}}\sum_{\beta\neq\alpha}\operatorname{tr}H_\beta^2.$$

又 $\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq\alpha}\operatorname{tr}H_\beta^2=(p-1)\sigma$,且 $(n-1)^{\frac{1}{2}}<n$,所以

$$4\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k}h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}K_{\alpha\beta ij}\geqslant-\frac{8}{3}(1-\delta)n(p-1)\sigma. \tag{3.12.49}$$

由式(3.12.47)得

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha,\beta}\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)\sum_k K_{\alpha k\beta k}\\
&=-\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}}\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)\sum_k K_{\alpha k\beta k}-\sum_\alpha \operatorname{tr}H_\alpha^2\sum_k K_{\alpha k\alpha k}\\
&=-\sum_\alpha \operatorname{tr}H_\alpha^2\sum_k K_{\alpha k\alpha k}\geqslant -n\sigma
\end{aligned}
\tag{3.12.50}
$$

又

$$
\begin{aligned}
&\sum_\alpha\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha K_{mijk}+h_{mi}^\alpha K_{mkjk})\\
&=\frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_{i,k}(\lambda_i^\alpha-\lambda_k^\alpha)^2K_{ikik}\\
&\geqslant\frac{1}{2}\delta\sum_\alpha\sum_{i,k}(\lambda_i^\alpha-\lambda_k^\alpha)^2=n\delta\sigma.
\end{aligned}
\tag{3.12.51}
$$

在式(3.12.46)中取 $a=-1$,由式(3.12.47),式(3.12.49)—式(3.12.51)及定理3.3.1的(1)和(2)得

$$
\begin{aligned}
&\sum_\alpha\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha\\
&=4\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k}h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta K_{\alpha\beta ij}-\sum_{\alpha,\beta}\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)\sum_k K_{\alpha k\beta k}\\
&\quad+2\sum_\alpha\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha K_{mijk}+h_{mi}^\alpha K_{mkjk})-\sum_\alpha(\operatorname{tr}H_\alpha^2)^2\\
&\quad-2\sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2]\\
&\geqslant-\frac{8}{3}(1-\delta)n(p-1)\sigma-n\sigma+2n\delta\sigma-2\sigma^2+\frac{1}{p}\sigma^2\\
&=\sigma\left[(2\delta-1)n-\frac{8}{3}(1-\delta)n(p-1)-\left(2-\frac{1}{p}\right)\sigma\right].
\end{aligned}
\tag{3.12.52}
$$

由题设式(3.12.48)成立,得

$$
\frac{1}{2}\Delta\sigma=\sum_\alpha\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2+\sum_\alpha\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha\geqslant 0,\tag{3.12.53}
$$

又 M^n 紧致，由 Hopf 极大原理得 $\sigma =$ 常数，所以 $\Delta\sigma = 0$，从而得

$$h_{ijk}^{\alpha} = 0, \sum_{\alpha}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} = 0 \tag{3.12.54}$$

并且式(3.12.52)取等号，即

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} = \sigma\left[(2\delta - 1)n - \frac{8}{3}(1-\delta)n(p-1) - \left(2 - \frac{1}{p}\right)\sigma\right] \tag{3.12.55}$$

因此上面各式均取等号，由式(3.12.49)取等号得

$$3\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j,k} h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}K_{\alpha\beta ij} = -2(1-\delta)n(p-1)\sigma, \tag{3.12.56}$$

令

$$A = \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 - \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}(K_{\alpha kikj} + K_{\alpha ijkk}), \tag{3.12.57}$$

由式(3.12.6)及式(3.12.54)，式(3.12.56)和式(3.12.51)取等号得

$$A = -2(1-\delta)n(p-1)\sigma - n\sigma + n\delta\sigma, \tag{3.12.58}$$

现设一次微分形式 ω 为 $\omega = \sum_{k}\sum_{\alpha}\sum_{i,j}(h_{ik}^{\alpha}K_{\alpha jij} + h_{ij}^{\alpha}K_{\alpha ijk})\omega_k$，

由式(3.12.54)，ω 的散度

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\omega &= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} \nabla_k(h_{ik}^{\alpha}K_{\alpha jij} + h_{ij}^{\alpha}K_{\alpha ijk}) \\
&= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k}(h_{ikk}^{\alpha}K_{\alpha jij} + h_{ijk}^{\alpha}K_{\alpha ijk}) + \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}(K_{\alpha kikj} + K_{\alpha ijkk}) \\
&= \sum_{\alpha}\sum_{i,j,k} h_{ij}^{\alpha}(K_{\alpha kikj} + K_{\alpha ijkk}) = -A,
\end{aligned} \tag{3.12.59}$$

由式(3.12.58)和式(3.12.59)得

$$(1-\delta)n(2p-1)\sigma = \operatorname{div}\omega \tag{3.12.60}$$

因 M^n 紧致，由 Green 散度定理得

$$\int_{M^n}(1-\delta)n(2p-1)\sigma\, dv = \int_{M^n} div\omega\, dv = 0, \tag{3.12.61}$$

其中 dv 为 M^n 的体积元素，又 $\frac{1}{2} < \delta \leqslant 1$，由式(3.12.61)得 $\delta = 1$，得 N^{n+p} 是截面曲率为 1 的常曲率空间 $S^{n+p}(1)$，于是式

(3.12.55) 归结为

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} = \sigma\left[n - \left(2 - \frac{1}{p}\right)\sigma\right]. \qquad (3.12.62)$$

因此 $\sigma = 0$ 或 $\sigma = \dfrac{n}{2 - \dfrac{1}{p}}$,

(1) 若 $\sigma = 0$,则 M^n 为全测地子流形,再由式(3.3.16) 和式(3.3.18) 得

$$R_{ijkl} = K_{ijkl}, \omega_{i\alpha} = 0, \qquad (3.12.63)$$

因 N^{n+p} 是局部对称空间,即 $K_{ABCD;E} = 0$,所以 R_{ijkl} 的协变导数 $R_{ijkl;m}$ 为

$$\begin{aligned}
&\sum_m R_{ijkl;m}\omega_m \\
&= \mathrm{d}K_{ijkl} + \sum_m K_{mjkl}\omega_{mi} + \sum_m K_{imkl}\omega_{mj} \\
&\quad + \sum_m K_{ijml}\omega_{mk} + \sum_m K_{ijkm}\omega_{ml} \\
&= \sum_m K_{ijkl;m}\omega_m = 0.
\end{aligned}$$

得 $R_{ijkl;m} = 0$,故 M^n 是局部对称的黎曼流形 .

(2) $\sigma = \dfrac{n}{2 - \dfrac{1}{p}}$,由定理 3.11.2 知,$M^n$ 或者是 $S^{n+1}(1)$ 中的 Clifford 极小曲面,或者是 $S^4(1)$ 中的 Veroness 曲面 $S^2(\sqrt{3})$.

注 当 $\delta = 1$ 时,式(3.12.48) 为式(3.11.7),故定理 3.12.6 是定理 3.11.2 的推广 .

定理 3.12.7 设 M^n 是局部对称的 δ-Pinching 黎曼流形 N^{n+p} 中的极小子流形,如果 M^n 的截面曲率满足下列条件之一:

$$R_{ijij} \geqslant \frac{n + 2 - 2\delta + \frac{8}{3}(1 - \delta)(p - 1)}{2(n + 1)}, \qquad (3.12.64)$$

$$R_{ijij} \geqslant \frac{p - \delta + \frac{8}{3}(1 - \delta)p(p + 1)}{2p - 1}, \qquad (3.12.65)$$

则 M^n 必为下列情形之一:

(1) $\sigma = 0$,M^n 是全测地子流形,并且 M^n 也是局部对称的 .

(2) $\sigma = \frac{n+1}{2(n+1)}$ 或 $\sigma = \frac{p-1}{2p-1}$,$M^n$ 或者是 $S^{n+1}(1)$ 中的 Clifford 极小超曲面,或者是 $S^4(1)$ 中的 Veroness 曲面 $S^2(\sqrt{3})$.

证明:令 $h_{ij}^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$,因为

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk} + h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{i,k}(\lambda_i^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha})^2 R_{ikik}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}R_M\sum_{\alpha}\sum_{i,k}(\lambda_i^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha})^2 = n\sigma R_M. \tag{3.12.66}$$

式中 R_M 是子流形 M^n 上每点截面曲率 R_{ijij} 的下确界,即 $R_M \leqslant R_{ijij}$,在式(3.12.46)中,对于实数 a:$0 < a < 1$,由式(3.12.49),式(3.12.50),式(3.12.51),式(3.12.66)及定理 3.3.1 的(1)和(4)得

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$\geqslant -\frac{8}{3}(1-\delta)n(p-1)\sigma - n\sigma + (1-a)n\delta\sigma + (1+a)n\sigma R_M$$

$$-\frac{(1-a)n}{2}\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})]^2 + a\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})]^2.$$

取 $a = \frac{n}{n+2}$,上式为

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$\geqslant \frac{n\sigma}{n+2}\left[2(n+1)R_M - (n+2-2\delta) - \frac{8}{3}(1-\delta)(p-1)\right]. \tag{3.12.67}$$

在式(3.12.46)中,对于 a:$0 < a < 1$,由式(3.12.49)~式(3.12.51),式(3.12.66),式(3.12.47)及定理 3.3.1 的(1)和(3)得

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$\geqslant -\frac{8}{3}(1-\delta)n(p-1)\sigma - n\sigma + (1-a)n\delta\sigma + (1+a)n\sigma R_M$$

$$-(1-a)\frac{p-1}{p}\sigma^2 + \frac{a}{p}\sigma^2.$$

取 $a = \dfrac{p-1}{p}$,上式为

$$\sum_{\alpha}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$\geqslant \frac{n}{p}\sigma\left[(2p-1)R_M - (p-\delta) - \frac{8}{3}(1-\delta)p(p-1)\right]. \tag{3.12.68}$$

在定理 3.12.7 的条件式(3.12.64) 或式(3.12.65) 下,同定理 3.12.6 的证明类似,可知结论成立.

注 当 $\delta = 1$ 时,易见定理 3.12.7 是定理 3.11.12 和定理 3.11.13 的推广.

习 题 三

1. 证明悬链面 M^2:

$$x(u,v) = (\mathrm{ch}v\cos u, \mathrm{ch}v\sin u, v),\text{即}$$

$$z = \mathrm{arcch}\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \geqslant 1$$

是 R^3 中的极小曲面.

2. 证明 Scherk 曲面 M^2:

$$z = \log(\cos y) - \log(\cos x)$$

是 R^3 中的极小曲面.

3. 证明定理 3.8.8;定理 3.8.10;定理 3.8.12.

4. 设 M^n 是 R^{n+1} 中的超曲面,$f: R^{n+1} \to R$ 是 R^{n+1} 上的光滑实值函数,又设 e_{n+1} 是 M^n 在 R^{n+1} 中外指单位法向量场,试证

$$\Delta f\mid_{M^n} = \Delta_M f_M + nH\frac{\partial f}{\partial e_{n+1}} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 e_{n+1}}.$$

5. 设(x,y,z)是R^3中的坐标,$(u_1,\cdots,u_7)$是R^7中的坐标,定义一个3阶齐次多项式

$$u_1 = \frac{1}{12}z(-3x^2 - 3y^2 + 2z^2),\ u_2 = \frac{\sqrt{6}}{24}x(-x^2 - y^2 + 4z^2),$$

$$u_3 = \frac{\sqrt{15}}{12}z(x^2 - y^2),\ u_4 = \frac{\sqrt{10}}{24}x(x^2 - 3y^2)$$

$$u_5 = \frac{\sqrt{6}}{24}y(-x^2 - y^2 + 4z^2),\ u_6 = \frac{\sqrt{15}}{6}xyz,$$

$$u_7 = \frac{\sqrt{10}}{24}y(3x^2 - y^2).$$

试证: (1) $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{u_1^2 + \cdots + u_7^2}{6}\right)^2$,

(2) $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = (\mathrm{d}u_1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}u_7)^2 = \mathrm{d}\bar{s}^2$,

(3) 限制到$S^2(1)$中时,

$$\Delta u_A = -2u_A,\ A = 1,2,\cdots,7.$$

因此根据3.10.2知,由$u_1,\cdots,u_7$确定了$S^2(1)$到$S^6\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$的一个紧致极小嵌入曲面.

[General Information]
书名=子流形几何
作者=纪永强著
页数=267
SS号=11210145
DX号=
出版日期=2004年01月第1版
出版社=科学出版社